

NOM :

Le 16 avril 2010

PRENOM :

TELECOM Lille1

PROMOTION :

QROC

Estimation statistique

Seuls les supports de cours sont autorisés.

Les corrections de TD ainsi que tout matériel électronique sont interdits.

Exercice 1

On construit un test d'hypothèses sur le poids de de cabillauds et de flétans. Leurs poids sont respectivement distribués par des lois normales $N(5,10)$ et $N(10,10)$. De plus on souhaite prendre en compte dans le test d'hypothèses les probabilités de pêcher un cabillaud et un flétan qui sont respectivement de 0,6 et 0,4.

1. Quel test d'hypothèses binaires suggérez-vous pour cette application parmi les tests d'hypotèses de la vraisemblance maximale, de Neyman-Pearson et Bayésien ? Justifiez votre réponse.

2. Développez le test d'hypothèses choisi et précisez le seuil de décision associé au test de la question précédente.

3. On souhaite prendre en compte dans le test d'hypothèses le prix de vente des poissons sachant que le prix d'un cabillaud vaut le prix d'un flétan / 2. Proposer un seuil pour le test d'hypothèses tenant compte de cette donnée.

Exercice 2

Soit (X_0, \dots, X_{N-1}) un échantillon d'une variable aléatoire gaussienne $N(\mu, 2)$. On rappelle que

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4}} \quad (1)$$

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ par la méthode du maximum de vraisemblance.

2. Cet estimateur est t'il sans biais ?

Exercice 3

Soit un canal à interférences entre deux symboles et bruit blanc additif gaussien décrit par l'équation suivante :

$$Y_k = h_0 X_k + h_1 X_{k-1} + B_k \quad (2)$$

où X_k sont des symboles BPSK ($X_k \in \{-1, 1\}$), B_k est un bruit blanc gaussien $N(0, P)$ et h_0, h_1 sont les deux coefficients du canal.

Pour estimer la réponse impulsionnelle du canal, on crée un filtre optimal au sens de Wiener à deux coefficients qui a pour objectif de reproduire la sortie du canal à partir de la même entrée.

1. Pour cette application, quels sont les signaux d'entrée, de sortie et désiré du filtre optimal.

2. En supposant que les symboles sont indépendants, équiprobables et de puissance égale à 1, que valent la matrice de corrélation du signal d'entrée et le vecteur d'intercorrélation du vecteur d'entrée et du signal désiré.

3. En déduire les coefficients optimaux au sens de Wiener.

Exercice 4

Questions de cours

1. Estimation paramétrique : Que mesure la variance d'un estimateur sans biais ?

2. Estimation paramétrique : Quelle est la borne inférieure de la variance d'un estimateur sans biais ?

3. Filtre de Kalman : A quel critère répond le filtre de Kalman dans le cas d'un modèle dynamique d'état linéaire et non gaussien ?