# Mardi 20 septembre

## Questions :

### 1

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \frac{A^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi k f_0\, t).\cos(2\pi l f_0 t)\, dt = \frac{A^2}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2(k+l) f_0 t) + \cos(2(k-l) f_0 t) dt$$

$$= \frac{A^2}{2} \left[ \frac{\sin(2\pi f_0 t(k+l))}{2\pi f_0 (k+l)} + \frac{\sin(2\pi f_0 t(k-l))}{2\pi f_0 (k-l)} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{A^2}{2} (sinc(k+l) + sinc(k-l)) = 0$$

Donc $\Psi_k(t)\ et\ \Psi_l(t)$ forment une base orthogonale.

### 2

Cette base est orthonormale à condition que $\sqrt{\langle \Psi_k(t), \Psi_k(t) \rangle} = \|\Psi_k\| = 1$

### 3

$$X_l(f) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_l(t).e^{-2\pi j f_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi l f_0 t).e^{-2\pi j f t} dt$$

$$= \frac{A}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (e^{2\pi j l f_0 t} + e^{-2\pi j l f_0 t}).e^{-2\pi j f t} dt = \frac{A}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi j t(l f_0 - f)} + e^{-2\pi j t(l f_0 - f)}$$

$$= \frac{A}{2} \left[ \frac{e^{2\pi j t(l f_0 - f)}}{2\pi j(l f_0 - f)} + \frac{e^{-2\pi j t(l f_0 - f)}}{-2\pi j(l f_0 - f)} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{A}{2} \left( \frac{e^{\pi j(l f_0 - f)}}{2\pi j(l f_0 - f)} + \frac{e^{-\pi j(l f_0 - f)}}{-2\pi j(l f_0 - f)} \right)$$

### 4

On peut utiliser cette base pour le multiutilisateurs en convoluant à la sortie pour récupérer un seul signal voulu.