Jeudi 29 Septembre 2011

Bruno
FAUDEUX
FA 13

1- $rect(t) * rect(t) = \int_{\mathbb{R}} rect(u).\, rect(t-u)\, du \quad (1)$

or $rect(u) = \begin{cases} 1 & \forall\, u \in [-1/2; 1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $rect(t-u) = \begin{cases} 1 & \forall\, (t-u) \in [-1/2; 1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $-1/2 \leq t-u \leq 1/2$ et $-1/2 \leq u \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -1/2 + t \leq u \leq 1/2 + t$

. si $t < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + t \leq u \leq t + \frac{1}{2} \equiv -1/2 - |t| \leq u \leq 1/2 - |t|$

. si $t = 0 \Rightarrow -1/2 + t \leq u \leq t + 1/2 \equiv -1/2 \leq u \leq 1/2$

. si $t > 0 \Rightarrow t - 1/2 \leq u < t + 1/2$

or $rect(u).\, rect(t-u) = 1$ si u et $t-u \in [-1/2; 1/2]$ et 0 sinon

donc si . $t < 0 \Rightarrow -1/2 - |t| < -1/2$ et $1/2 - |t| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ (1) devient $\int_{-\infty}^{-1/2} 0\, du + \int_{-1/2}^{1/2-|t|} 1\, du + \int_{1/2-|t|}^{+\infty} 0\, du = \int_{-1/2}^{1/2-|t|} 1\, du = \boxed{1 - |t|}$

. si $t = 0$
(1) devient $\int_{-1/2}^{1/2} 1\, du = \boxed{1}$.

et si $t > 0 \Rightarrow t - 1/2 > -1/2$ et $1/2 < t + \frac{1}{2}$
(1) devient $\int_{t-1/2}^{1/2} 1\, du = \boxed{1 - t}$

or la fonction qui vaut $\begin{cases} 1 - |t| & \forall\, t < 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \\ 1 - t & \forall\, t > 0 \end{cases}$ est $rect(t) = x(t)$.

2- $X(f) = TF(trian(t)) = TF(rect(t) * rect(t)) = TF(rect(t)) \times TF(rect(t))$

or $TF(rect(t)) = sinc(f) \Rightarrow X(f) = sinc^2(f)$.

3- $y(t)$ est la modulation en amplitude de $x(t)$ (mod AM) autour de f_0.

$y(t) = \frac{1}{2}\left(trian(t).\, e^{i2\pi f_0 t} + trian(t).\, e^{-2\pi f_0 t i}\right)$

$Y(F) = \frac{1}{2}\left(sinc^2(f) * \delta(f - f_0) + sinc^2(f) * \delta(f + f_0)\right)$