Énergie / Puissance Moyenne finie

- $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$

↳ si $E_x < +\infty$ alors $x(t)$ est à Énergie finie.

- $P_x = \lim \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$ → Si le signal est périodik il n'y a pas de limite.

↳ Si $P_x < +\infty$ alors $x(t)$ est à Puissance Moy finie.

Impulsion de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot \delta(t)$$

$\boxed{\delta(t) = 0}$

- $x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0)$

} Principe de localisation

- $(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)\, x_2(t-u)\, du$
- $(x * \delta)(t-t_0) = \int x(u) \cdot \delta(t-t_0-u) = x(t-t_0)$

} Rappel convolut°

- $x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum x(t-kT)$

Convoluer un signal $x(t)$ par le peigne de Dirac revient à périodiser $x(t)$ à la période T.

- $x(t) \cdot \sum \delta(t-kT) = \sum x(kT) \cdot \delta(t-kT)$

Discrétisation temporelle.

Peigne de Dirac

- $\langle x, y \rangle = \sum x(k)\, y(k)$ → Produit scalaire.

Espace Signaux à Énergie finie.

- Temps Continus :	- Temps discret :	
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt$	$\sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\, y^*(k)$	Produit scalaire
$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt}$	$\sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(k)\rvert^2}$	Norme
$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t) - y(t)\rvert^2 \, dt}$	$\sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(k) - y(k)\rvert^2}$	Distance

Espace signaux de Puissance Moyenne finie

- Temps continu :	- Temps discret
$\frac{1}{T} \int_T x(t)\, y^*(t)\, dt$	$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y^*(k)$
$\sqrt{\frac{1}{T} \int_T \lvert x(t)\rvert^2 \, dt}$	$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \lvert x(k)\rvert^2}$
$\sqrt{\frac{1}{T} \int_T \lvert x(t) - y(t)\rvert^2 \, dt}$	$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \lvert x(k) - y(k)\rvert^2}$

Signal L2 → $E_x = \|x\|^2$, $P_x = \|x\|^2$

orthogonaux → $\langle x, y \rangle = 0$ ⊥

colinéaire → $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$

} Énergie finie seulement.

↳ $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Inégalité de Cauchy)

Autocorrélation & Intercorrélation.

- Autocorrélation : $C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$
- Intercorrélation : $C_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$

$C_{yx}(\tau) = \langle y(t), x(t-\tau) \rangle$

- Propriétés : $\cdot\, C_x(0) = P_x$ ou E_x (suivant le signal)
  - $C_x(\tau) = C_x(-\tau)$ → si x réel (autocorrélation paire)
  - $C_x(\tau)$ est maximal en 0.
  - Si $x = \delta$ → $C_x(\tau) = \delta(t)$

Série de Fourier

Ne concerne que les signaux périodique.

- x_0 : composante continue = valeur moyenne
- $x_1 \cdot e^{2j\pi t/T} + x_{-1} \cdot e^{-2\pi j t/T}$: fondamentale.
- $x_k \cdot e^{2\pi j k t/T}$: harmonique d'ordre k.

Relation de perseval :

$$P_x = \|x(t)\|^2 = \sum |x_k|^2$$

Transformée de Fourier.

$$X(f) = TF(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \exp(-2\pi j f t)\, dt$$

$$x(t) = TF^{-1}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \exp(2\pi j f t)\, df$$

A connaitre :

$TF(rect(t)) = sinc(f)$	$TF(\delta(t)) = 1$
$TF(sinc(t)) = rect(f)$	$TF^{-1}(\delta(f)) = 1$
$TF(trian(t)) = sinc^2(f)$	$TF(e^{2\pi j k t/T}) = \delta(f - k/T)$
$TF(sinc^2(t)) = trian(f)$	$TF(\cos 2\pi f_0 t) = \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$

$TF(\sin 2\pi f_0 t) = \frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$

Propriétés :

- Translation : $x(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-2\pi j f t_0} \cdot X(f)$
- Modulation : $\exp(2\pi j f_0 t)\, x(t) \xrightarrow{F} X(f-f_0)$
- Homothétie : $x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X(f/a)$
- Convolution : $(x * y)(t) \xrightarrow{F} X(f) \cdot Y(f)$
  - $x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{F} X(f) * Y(f)$

Parseval : $\langle x(t), y(t) \rangle = \langle X(f), Y(f) \rangle$

↳ $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, Y^*(f)\, df$

Peigne de Dirac : $\sum \delta(t-kT) \xrightarrow{F} \frac{1}{T} \sum \delta(f - k/T)$

Remarques :

1) Translater un signal ds le domaine temporel correspond à un déphasage ds le domaine fréquentiel

Temporellement :

1) Convoluer un signal avec 1 dirac : translate le signal
2) Convoluer un signal avec Ш = périodiser le signal
3) Multiplier un signal avec Σ dirac : localiser le signal
4) Multiplier un signal avec 1 Ш = échantillonner le signal
5) La discrétisation d'un signal revient à garder qu'un certains nombres de valeurs. faire la TF de ce signal correspond à la périodisation du spectre.

Densité Spectrale d'Énergie.

→ $|x(t)|^2$: densité temporelle d'énergie répartition de l'énergie ds le temps

→ $|X(f)|^2$: densité spectrale d'énergie. répartition en fréquence de l'énergie

→ On note $S_x(f)$ la densité spectrale d'énergie

Pour les signaux à Énergie finie :

$S_x(f) = (C_x(\tau))$ ou $S_x(f) = |X(f)|^2$

Théorème de Wiener Khinchine.

Densité Spectrale de Puissance

→ Répartition de la puissance ds l'espace des fréquences.

→ Notation $S_x(f) = TF(C_x(\tau))$

↳ avec $C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$

Propriétés :

si $x(t)$ est à énergie finie : $S_x(f) = |X(f)|^2 = X(f) \cdot X^*(f)$

$S_x(f) > 0$

$y(t) = x(t-t_0) \rightarrow S_y(f) = S_x(f)$

FLIT : filtre Linéaire Invariant ds le temp.

Un filtre est un système LIT qui transforme un signal d'entrée x en une réponse y :

1) si x et y sont à temps continu :

→ $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$

2) si x et y sont à temps discret :

→ $y(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k-i)\, x(i)$

Le noyau "h" du filtre est appelé Réponse Impulsionnelle.

→ $y(t) = (h * x)(t)$ | Relier $x(t)$ à $y(t)$

y : réponse / x : excitation

→ $H(f) = TF(h(t))$ → fonction de transfert.

→ $Y(f) = H(f) \cdot X(f)$

avec $|H(f)|$ = gain fréquentiel

$\arg(H)$ = déphasage du filtre

Propriétés :

1) Causalité : ssi $h(t) = 0$

2) Stabilité : ssi à toutes excitation borné ($x(t) < x_m$), la réponse est aussi bornée.

Densité Spectrales de signaux filtrés :

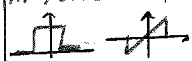
$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$

Les filtres (idéal).

Passe - bas :

$H(f) = \exp(2\pi j f t_0) \cdot \Pi_{[-B,B]}(f)$

$h(t) = 2B\, sinc(2B(t+t_0))$

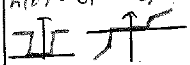


Module / Arg.

Passe - haut

$H(f) = \exp(2\pi j f t_0) \cdot \Pi_{]-\infty,-B] \cup [B,+\infty[}(f)$

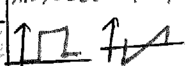
$h(t) = \delta(t-t_0) - 2B\, sinc(2B(t+t_0))$



Passe - bande

$H(f) = \exp(2\pi j f t_0) \cdot \Pi_{[f_0-B, f_0+B]}(f)$

$h(t) = 2B\, sinc(2B(t+t_0)) \exp(2\pi j f_0(t+t_0))$



Échantillonnage

Permet de passer d'un signal continu à un signal constitué d'une combinaison δ.

$x_e(t) = x(t) \cdot T_e \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$

$X_e(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - k/T_e)$

↳ Le spectre $X_e(f)$ est la répétit° sur l'axe des fréquences à $f_e = 1/T_e$

Théorème de Shannon :

la fréquence d'échantillonnage doit être > à 2 fois la fréquence max. → $f_e > 2 f_{max}$

Échantillonnage réel :

$x_{er}(t) = T_e \sum (x * h)(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$

$= (x * h)(t) \cdot T_e \sum \delta(t - kT_e)$

$X_{er}(f) = (X(f) \cdot H(f)) * \sum \delta(f - k/T_e)$

$= X_h(f) * \sum \delta(f - k/T_e)$

Règles Mathématiques

- $\sin(-a) = -\sin(a)$
- $\cos(-a) = \cos(a)$
- $\sin(\pi - a) = \sin(a)$
- $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
- $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
- $\cos(\pi + a) = \cos(a)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$
- $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$
- $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
- $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin(a+b/2) \cdot \cos(a-b/2)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos(a+b/2) \cdot \sin(a-b/2)$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(a+b/2) \cdot \cos(a-b/2)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin(a+b/2) \cdot \sin(a-b/2)$
- $2\sin(a)\cos(a) = \sin(2a)$

- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$
- $\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $e^{2\pi j} = \cos 2\pi + j\sin 2\pi = 1$
- $\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin(x)$

$\exp(a+b) = e^a \cdot e^b$
$\ln(\exp(a+b)) = a+b$

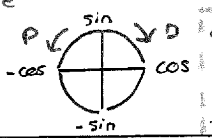
$\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Dérivées :

$x = 1$
$x^n = n x^{n-1}$
$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
$e^u = u' e^u$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$e^x = e^x$

Primitives :

$x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{1}{x} = \ln|x| + k$
$e^x = e^x$ $\quad e^{at} = \frac{e^{at}}{a}$
$\cos(ax+b) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$



$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2j}$
formule d'Euler

Exercice 4

$x(t) = \text{sinc}(\beta t)\, e^{-j\pi\beta t}$

1) $X(f) = TF(x(t))$
$= TF(\text{sinc}(\beta t)) * TF(\exp(-2\pi j \beta t/2))$
$= \frac{1}{\beta}\text{rect}(f/\beta) * \delta(f + \beta/2)$
$= \frac{1}{\beta}\text{rect}\left(\frac{f+\beta/2}{\beta}\right)$ → Spectre borné NRJ finie.

2) DSP
$S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{\beta^2}\text{rect}\left(\frac{f+\beta/2}{\beta}\right)$
$y(t) = x(t - t_0)$
$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f) \cdot \exp(-2\pi j f t_0)|^2$
$= |X(f)|^2 = S_x(f)$

QROC 2013/2014

Exercice 1

$\Psi_k = \exp(j 2\pi k t/T)$

1) Montrer que (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) → base orthogonale

$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \exp(j 2\pi t/T)\exp(-j 4\pi \frac{t}{T})\,dt$
$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi j t/T}\,dt$
$= \frac{1}{-T\,2\pi j/T}\left[\exp(-2\pi j\, t/T)\right]_{-T/2}^{T/2}$
$= \sin\pi/\pi = 0$ → $\langle \Psi_1,\Psi_2 \rangle \langle \Psi_1,\Psi_3 \rangle \langle \Psi_2,\Psi_3 \rangle$ sont des bases ...
$= x(-\infty)$

QROC 2013/2014

$x(t) = e^{-at} \cdot \mathbb{1}_{[0;+\infty[}$ avec $a > 0$

1) NRJ ou Puissance finie
Signal transitoire, bornée en Ampli + temps
la lim $x(t) = 0$

2) DSP
$S_x(f) = |X(f)|^2$
$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-at}\, e^{-2\pi j f t}\,dt$
$= \frac{1}{-a-2\pi j f}\left[e^{(-a-2\pi j f)t}\right]_0^{\infty}$
$X(f) = \frac{1}{a + 2\pi j f}$

$\boxed{S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + 4\pi f^2}}$

3) Calcul de la réponse impulsionnel et f de transfert
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\mathbb{1}_{[0;T]}(u)\, x(t-u)\,du$ | filtre causal
$\boxed{= \int h(u)\, x(t-u)}$

Si $h(t) = 0$ pour tout $t < 0$
$H(f) = TF(h(t))$
$= \sin(fT)/e^{-2\pi j f T/2}$

$h(t) = \frac{1}{T}\mathbb{1}_{[0;T]}(t)$
$= \frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$ | le filtre passe bas.

1) PTF

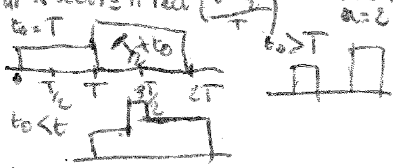
$x(t) = A\cos(2\pi f_0 (t - t_0))$
$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$
$= \frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos^2(2\pi f_0 (t - t_0))\,dt$
$= \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \cdot \frac{1}{2}[1 + \cos(4\pi f_0 (t - t_0))]\,dt$
$= \frac{A^2}{2T}\int_0^T 1\,dt \to \frac{A^2}{2} < \infty$

Périodique + amplitude bornée
Puissance moyenne finie
Énergie infinie
Support temporel infini
Bornée = énergie infinie
Infini + puissance finie
Fréquence finie
Énergie infinie
Support temporel infini
Bornée = énergie infinie
Support temporel infini
Et amplitude bornée

2) Autocorrélation.
$C_x(t, t-\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$
$= \frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(2\pi f_0 (t - t_0)) \cdot \cos(2\pi f_0 (t - t_0 - \tau))$
$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$

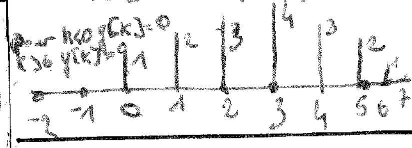
3) DSP
$S_x(f) = TF(C_x(\tau))$
$= \frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)\right)$
$= \frac{A^2}{4}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$

4) Si $x(t) = A\,\text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$ avec $A = 1$, $a = 2$



Exo 3 : 2) Donner l'expression $y(k)$.
$Y(k) = x[k] * h[k] = x[k] * x[k]$
$= \sum_{n=0}^{} x[n]\, x(k-n)$.

pour $k < 0$ $y[k] = 0$
si $y(k)$



4) On transmet 2 symboles de durée T et d'Amplitude $+1$ et -1.
$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) - \text{rect}\left(\frac{t - 3T/2}{T}\right)$
$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) - \text{rect}\left(\frac{t - 3T/2}{T}\right)$
$+ a\,\text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) - a\,\text{rect}\left(\frac{t - 3T/2}{T}\right)$

5) Valeur optimale de t_k qui permet de retrouver en sortie les symboles transmis
$t_k = kT + t_0$ avec $k = 0$ → 1 symbole
$t_0 = 0$ donc $t_k = kT$.

EXERCICE 3
1) NRJ ou PTF
$\sum_{n=0}^{3} x^2(k) = 4$
2) donner l'expression de $y(k)$
$y(k) = x(k) * x(k)$
$= \sum_{n=0}^{3} x(n)\, x(k-n)$

QROC 2015/2016 (1)

Exercice 1 :

1) calculer $TF(x(t))$ → Énergie ou Puissance finie.

$x(t) = \text{sinc}(\beta t) \cdot \exp(2\pi j \beta t)$.
$TF(x(t)) = TF(\text{sinc}(\beta t) \cdot \exp(2\pi j \beta t))$
$= TF(\text{sinc}(\beta t)) * TF(\exp(2\pi j \beta t))$
$= \frac{1}{\beta}\text{rect}(f/\beta) * \delta(f - \beta)$
$\boxed{= \frac{1}{\beta}\text{rect}(f - \beta/\beta)}$ borne $\left[\frac{\beta}{2}, \frac{3\beta}{2}\right]$ centré en β

Spectre bornée en Amplitude et fréquence
→ Transitoire
$E_x = \int_{\beta/2}^{3\beta/2} \left|\frac{1}{\beta} \cdot \text{rect}\right|^2 df$
$= \int_{\beta/2}^{3\beta/2} \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 df$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}(\beta t)\exp(2\pi \beta t)|^2\,dt$
$\boxed{= \frac{1}{\beta} < \infty}$

Exercice 1 (suite)

1) Spectre d'Amplitude et phase (2)

$X(f) = |X(f)|e^{j\varphi}$
Le spectre de phase est nul
fonction réelle.
Th. Shannon :
$f_e > 2 f_{max}$
$f_e > 2 \cdot 3\beta/2$
$\boxed{f_e > 3\beta}$.
Recherche valeur min de f_e.

3) Densité spectrale $S_x(f) = |X(f)|^2$
$\left[S_x(f) = \frac{1}{\beta}\text{rect}\left(\frac{f - \beta}{2}\right)\right.$

4) DSE invariant par transp. temporelle
$x'(t) = x(t - t_0)$
$= x(t) * \delta(t - t_0)$
$X'(f) = X(f) \cdot \exp(-2\pi j f t_0)$
$S_{x'}(f) = X'(f) \cdot X'^*(f) = |X'(f)|^2$
$= X(f) \cdot \exp(-2\pi j f t_0) \cdot X(f) e^{2\pi j f t_0}$
$= S_x(f)$

Exercice 2 : 2 mobiles $\pi 1$ et $\pi 2$ transmettent sur les porteuses. (3)

1) Montrer que les porteuses forme une base orthogonale
on vérifie que le P.S $= 0$
$\langle A\cos(2\pi f_0 t), B\sin(2\pi f_0 t) \rangle = 0$
$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A \cdot B \cdot \cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t)\,dt$
$= \frac{AB}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(4\pi f_0 t)\,dt$
$\boxed{= 0 \to \text{orthogonale !}}$

2) orthonormalité
$\|A\cos(2\pi f_0 t)\|^2 = 1$ et $\|B\sin(2\pi f_0 t)\|^2 = 1$
$\|A\cos(2\pi f_0 t)\|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2\cos^2(2\pi f_0 t)\,dt$
$\|B\sin(2\pi f_0 t)\|^2$ $\quad \boxed{B = \sqrt{2}}$
$= \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos(4\pi f_0 t))\,dt$
orthogonalité + norme signaux $= 1$ → base orthonormale
$= \frac{A^2}{2}$ doit être $=$ à 1.
→ $\boxed{A = \sqrt{2}}$.

3) Comment séparer les signaux. (4)
$\langle y(t), \sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) \rangle = \langle m_1 \cdot \sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) + m_2\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t), \sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) \rangle$
$= \langle m_1 \cdot \sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t), \sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) \rangle$
$= m_1$
$\langle y(t), \sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t) \rangle = m_2$

Exercice 3 : RADAR (5)
$x(t) = \text{rect}(t)$
$y(t) = A x(t - T_0)$
1) Autocorrélation.
$\boxed{C_x(\tau) = \text{trian}(\tau)}$
2) Intercorrélation $y(t)$ et $x(t)$
$C_{yx}(\tau) = \langle y(t), x(t - \tau) \rangle$
$= \langle Ax(t - T_0), x(t - \tau) \rangle$
$= A\int x(t - t_0) \cdot x(t - \tau)$
on pose $t' = t - t_0$
$= A\int x(t') \cdot x(t' + t_0 - \tau)\,dt'$
$= A\int x(t') \cdot x(t' - (\tau - t_0))\,dt'$
$\boxed{= A C_{xx}(\tau - t_0)}$

3) Calculer $C(\tau) = \langle y(t) + x(t), x(t - \tau) \rangle$ (6)
$= \langle y(t), x(t - \tau) \rangle + \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$ $\quad C(\tau)$
$= C_{yx}(\tau) + C_x(\tau)$
$\boxed{= A \cdot \text{trian}(\tau - t_0) + \text{trian}(\tau)}$

3) DSP de $x(t)$
$S_x(f) = TF(C_x(\tau))$
Pour les SIN et COS
on a $S_x(f) = |X(f)|^2$
$\boxed{S_x(f) = \frac{A^2}{4}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]}$

4) Autocorrélation
$C_x(\tau) = TF^{-1}(S_x(f))$
$= \frac{A^2}{4}\left(e^{2\pi j f \tau} + e^{-2\pi j f \tau}\right)$
$\boxed{= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f \tau)}$

Exercice 2 : $y(t) = x(t) + a \cdot x(t - t_0)$ (8)

1) Réponse impulsionnelle
$x(t) = \delta(t)$
$y(t) = \delta(t) * h(t)$
$= h(t)$
$y(t) = x(t) + a x(t - t_0)$
$= \delta(t) + a\delta(t - t_0)$
$\boxed{= h(t)}$

2) Propriété du filtre
* Causalité : $h(t) = 0$
* Stabilité : $\int |h(t)| < \infty$
* Linéarité : voir p.1
* Invariance : $h(t) = \delta(t) + a\delta(t - t_0)$

3) Calcul fonction Transfert
$H(f) = TF(h(t))$
$= TF(\delta(t) + \delta(t - t_0)a)$
$= \int \delta(t) + a\delta(t - t_0) \cdot \exp(-2\pi j f t)$
$= 1 + a\exp(-2\pi j f t_0)$
$|H(f)|^2 = H(f) \cdot H(f)$
$= (1 + a)^2 + 2a\cos(2\pi f t)$

QROC (TD) - 2013-2014. (7)

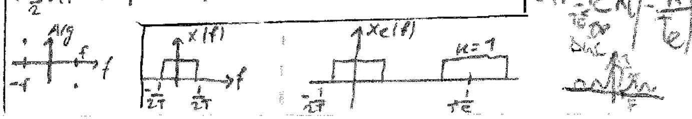
EXERCICE 1 : $x(t) = A\sin(2\pi f(t - t_0))$

1) Montrer que $x(t)$ est à puissance finie
$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$
$= \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(2\pi f(t - t_0))\,dt$
$= \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \cos(4\pi f(t - t_0))\,dt$
$= \frac{A^2}{2T}[t - 0]_{-T/2}^{T/2}$
$\boxed{= \frac{A^2}{2} < \infty}$

2) Calculer $X(f)$.
$X(f) = TF(x(t))$
$= A \cdot TF(\sin(2\pi f(t - t_0)))$
$= A \cdot TF\left(\frac{e^{2\pi j f(t - t_0)} - e^{-2\pi j f(t - t_0)}}{2j}\right)$
$= A \cdot e^{-2\pi j f t_0} \cdot \frac{TF(\exp(2\pi j f t)) - e^{2\pi j f t_0} \cdot TF(\exp(-2\pi j f t_0))}{2j}$
$= \frac{A \cdot e^{-2\pi j f t_0}}{2j} \cdot \delta(f - f) - \frac{A\exp(2\pi j f t_0)}{2j} \cdot \delta(f + f)$

Spectre d'Amplitude → $|X(f)|$
$|X(f)| = \sqrt{X(f) \cdot X^*(f)}$
$|X(f)|^2 = X(f) \cdot X(f)$
détailler $X(f) \cdot X(f)$
$= \frac{A^2}{4}\left(\delta(f - f) \cdot e^{-2\pi j f t_0} \cdot e^{2\pi j f t_0}\right) \delta(f - f) \cdot \delta(f + f) + 0 + \delta(f + f)$
$= \frac{A^2}{2} \cdot (\delta(f - f) + \delta(f + f))$
$\boxed{|X(f)| = \frac{A}{2}(\delta(f - f) + \delta(f + f))}$
→ Spectre Amplitude

Spectre phase :
$\text{Arg}(X(f)) = |X(f)| \cdot e^{j\varphi(f)}$
$= \frac{A}{2}\delta(f - f)\exp(-2\pi f t_0) \cdot e^{-j\pi/2} + \frac{A}{2}\delta(f + f)e^{j\pi} e^{-j\pi/2} e^{2\pi j f t_0}$



Exercice 3 : DISCRET
$x(k)$ signal échantillonné à kTe avec $Te = 1$
$x(k) = 1$ pour $0 \leq k \leq 4$
1) NRJ ou Puissance.
Signal borné $[0, 4]$ en temps et amplitude.
$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 \cdot Te$
$= \sum_{k=0}^{4} x(k)^2$
$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 5$
2) Autocorrélation :
$C_x(n) = \sum x(k)\, x(k - n)$
$= \sum_{k=0}^{4} x(k)\, x(k - n)$
$= 5\,\text{trian}(n/5)$

Exercice 4 : (10)
$x(t) = \text{sinc}(t/T)$
1) Calculer $TF(x(t))$.
$X(f) = TF(x(t))$
$X(f) = TF(\text{sinc}(t/T))$
$= TF(\text{sinc}(t \times 1/T))$
$= T \cdot \text{rect}(f/1/T)$
$\boxed{= T \cdot \text{rect}(fT)}$
$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$
$= \int_{\mathbb{R}} \text{sinc}^2(t/T)\,dt$
$= \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2$
$= \int_{-1/2}^{1/2} T^2\,dt = \boxed{T}$

2) Calculer $x_e(t)$ (11)
$x_e(t) = x(t) \cdot Te \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kTe)$
$\boxed{= Te\,\Sigma(x Te) \cdot \delta(t - kTe)}$

3) Calculer $Xe(f)$
$Xe(f) = TF(x_e(t)) = Te \cdot X(f) * \frac{1}{Te}\Sigma\,\delta(f - kTe)$
$Xe(f) = \Sigma X\left(f - \frac{K}{Te}\right)$