ENIC *Module A21* Année 2001-2002

Samedi 3 février 2002

CORRECTION Q.R.O.C

Exercice 1

Soit le signal $x(t)$ défini par $x(t)=\frac{1}{2\Delta}$ si $t \in [-\Delta,\Delta]$ et $x(t) = 0$ si $t \notin [-\Delta,\Delta]$

1. Calculer la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$

$x(t)$ s'écrit aussi $x(t)=\frac{1}{2\Delta}rect\left(\frac{t}{2\Delta}\right)$ puisque $TF[rect(t)] = sinc(f)$, en appliquant le propriété de l'homothètie, on obtient :

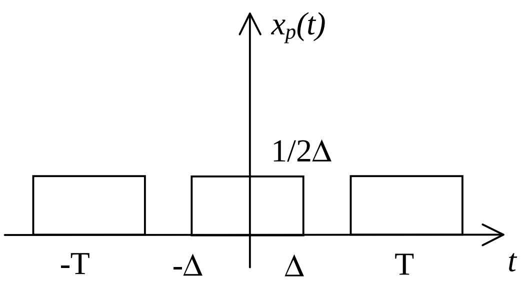
$$X(f)=\frac{1}{2\Delta}2\Delta\, sinc(2\Delta f)=sinc(2\Delta f)$$

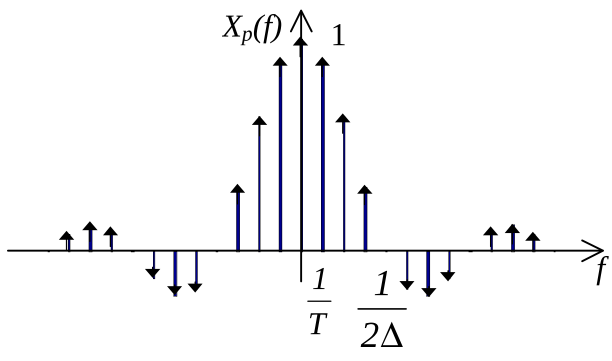
2. Soit $x_p(t)=x(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)$ avec $T \geq 2.\Delta$.

a. Calculez la transformée de Fourier $X_p(f)$ de $x_p(t)$ en fonction de celle de $x(t)$.
Tracer $x_p(t)$ et $X_p(f)$. Commenter.

$$X_p(f)=X(f)TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)\right]=X(f)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

soit $X_p(f)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$





Commentaire : Périodiser en temps ($x_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(t-k.T)$) un signal revient à discrétiser son support en fréquence.

b. Que se passe t'il lorsque $\Delta \to 0$.

Si $\Delta \to 0$, $(1/2\Delta)rect(t/2\Delta) = 0 \ \ \forall t \neq 0$, $(1/2\Delta)rect(0) = 1$ en $t = 0$

et $\lim\limits_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \lim\limits_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\Delta}rect(\frac{t}{2\Delta})dt = 1$

on a alors $\lim\limits_{\Delta\to 0} x(t) = \delta(t)$, $\lim\limits_{\Delta\to 0} X(f) = 1$

$$\lim_{\Delta\to 0} x_p(t) = \delta(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

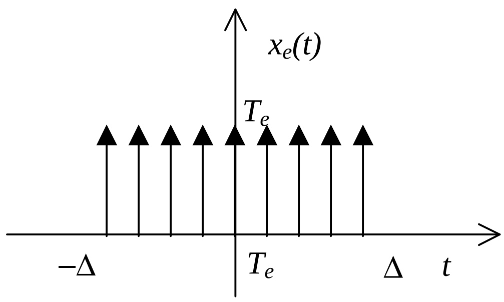
et $\lim\limits_{\Delta\to 0} X_p(f) = 1.\frac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$

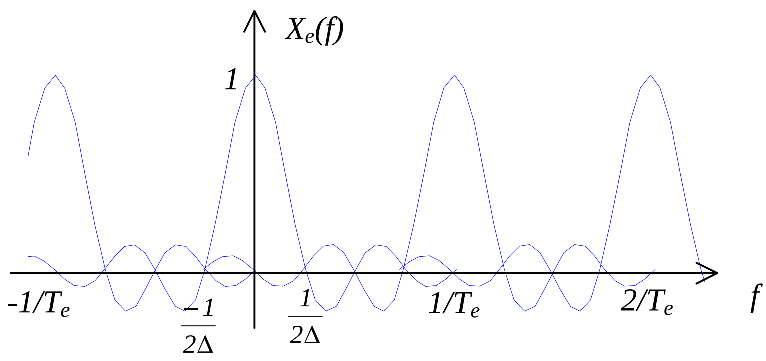
3. Soit $x_e(t) = T_e x(t).\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T_e)$

a. Calculez la transformée de Fourier $X_e(f)$ de $x_e(t)$ en fonction de celle de $x(t)$.
Tracer $x_e(t)$ et $X_e(f)$. Commenter.

$$X_e(f) = T_e X(f) * TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T_e)\right] = T_e X(f) * \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T_e}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta\left(f-\frac{k}{T_e}\right)$$

soit $X_e(f) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{k}{T_e}\right)$





Commentaire *:*
$x_e(t)$ est la version échantillonnée de $x(t)$. La représentation en fréquence $X_e(f)$ est alors périodique

b. Est t'il possible de restituer $x(t)$ à partir de $x_e(t)$, (justifiez votre réponse)?

Puisque le support de $X_e(f)$ n'est pas borné, on ne peut isoler une répétition du spectre, il est donc impossible de restituer x(t) à partir de $x_e(t)$.

Exercice 2

Soient *a* et *b* deux constantes et $x(t) = a\,exp\left(-2j\pi\frac{1}{T}t\right) + b\,exp\left(2j\pi\frac{2}{T}t\right)$

1. *x(t)* est à energie finie ou à puissance moyenne finie ? Justifier votre réponse.

x(t) étant périodique de période *T*, c'est un signal à puissance moyenne finie

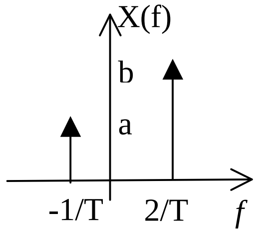
2. Développer sans calcul *x(t)* en série de Fourier (vous préciserez les coefficients de la série), en déduire sa transformée de Fourier que vous représenterez graphiquement. Commenter ce graphe.

Série de Fourier

Ecrire x(t) sous forme de série de Fourier, c'est le décomposer sous forme de $exp\left(2j\pi\frac{k}{T}t\right)$ avec k entier relatif, soit $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\,exp\left(2j\pi\frac{k}{T}t\right)$

On remarque que $x(t) = a\,exp\left(-2j\pi\frac{1}{T}t\right) + b\,exp\left(2j\pi\frac{2}{T}t\right)$ est déjà décomposé en série de Fourier, on a donc par identification X_{-1}= a et X_2 = b et X_k = 0 pour k différent de –1 et 2.

Transformée de Fourier



$$TF[x(t)] = aTF\left[exp\left(-2j\pi\frac{1}{T}t\right)\right] + bTF\left[exp\left(2j\pi\frac{2}{T}t\right)\right] = a\delta\left(f+\frac{1}{T}\right) + b\delta\left(f-\frac{2}{T}\right)$$

x(t) est localisé en fréquence en –1/T et 2/T

3. Calculer le produit scalaire $\left\langle x(t), exp\left(2j\pi\frac{k}{T}t\right)\right\rangle$ pour *k* entier relatif. En vous inspirant du résultat, que proposez-vous pour extraire de *x(t)* les constantes *a* et *b* ?

Puisque les signaux de la base {$exp\left(2j\pi\frac{k}{T}t\right)$, k entier relatif} sont orthogonaux et normée,

$$\left\langle x(t), exp\left(2j\pi\frac{k}{T}t\right)\right\rangle = a\left\langle exp\left(2j\pi\frac{-1}{T}t\right), exp\left(2j\pi\frac{k}{T}t\right)\right\rangle + b\left\langle exp\left(2j\pi\frac{2}{T}t\right), exp\left(2j\pi\frac{k}{T}t\right)\right\rangle$$

soit

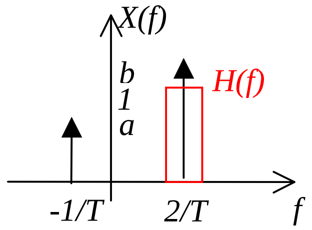
$\left\langle x(t), exp\left(2j\pi\frac{k}{T}t\right)\right\rangle = 0$ si k différent de –1 et 2, $\left\langle x(t), exp\left(2j\pi\frac{-1}{T}t\right)\right\rangle = a$ et $\left\langle x(t), exp\left(2j\pi\frac{2}{T}t\right)\right\rangle = b$

Pour extraire de x(t) a et b, il suffit de calculer $\left\langle x(t), exp\left(2j\pi\frac{-1}{T}t\right)\right\rangle$ et $\left\langle x(t), exp\left(2j\pi\frac{2}{T}t\right)\right\rangle$

4. Soit un filtre de fonction de transfert $H(f) = 1$ si $f \in \left[\frac{3}{2T}, \frac{5}{2T}\right]$ et $H(f) = 0$ ailleurs. Calculez la réponse de ce filtre à $x(t)$.

Le filtre va supprimer toutes les fréquences non comprises dans $\left[\frac{3}{2T}, \frac{5}{2T}\right]$.

Puisque x(t) est localiser en –1/T et 2/T, la réponse de $x(t)$ à ce filtre ne comporte que la fréquence en 2/T soit $y(t) = b\,exp\left(2j\pi\frac{2}{T}t\right)$



Exercice 3

Considérons le signal $x(t) = sinc(Bt)e^{-j\pi Bt}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$ et en déduire en la justifiant sa nature énergétique (signal à énergie finie, puissance moyenne finie).

$$z(t) = sinc(t) \xrightarrow{homothétie} y(t) = sinc(Bt) \xrightarrow{modulation} x(t) = sinc(Bt)e^{-j\pi Bt}$$

soit en appliquant les propriétés de la transfromée de Fourier

$$Z(f) = rect(f) \xrightarrow{homothétie} Y(f) = \frac{1}{B}rect\left(\frac{f}{B}\right) \xrightarrow{modulation} X(f) = \frac{1}{B}rect\left(\frac{f+B/2}{B}\right)$$

En appliquant l'identité de Parseval, on a

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{B^2}rect^2\left(\frac{f-B/2}{B}\right)df = \frac{1}{B^2}\int_{-B}^{0}1df = \frac{1}{B} < +\infty$$

x(t) est donc un signal à énergie finie

2. Que vaut sa densité spectrale d'énergie ?

Puisque x(t) est à énergie finie, $S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{B^2}rect^2\left(\frac{f+B/2}{B}\right) = \frac{1}{B^2}rect\left(\frac{f+B/2}{B}\right)$

3. Soit $y(t) = x(t-t_0)$. En utilisant un résultat du cours, donner la densité spectrale d'énergie de $x(t)$? Démontrer ce résultat.

La densité spectrale ainsi que l'autocorrélation sont invariantes par translation temporelle de x(t), on obtient alors $S_y(f) = S_x(f)$.

Démonstration : Dans le cas des signaux à énergie finie, $S_y(f) = |Y(f)|^2$

puisque $y(t) = x(t-t_0)$, en appliquant la propriété du retard, $Y(f) = X(f)e^{-2j\pi ft_0}$

soit $S_y(f) = |Y(f)|^2 = \left|X(f)e^{-2j\pi ft_0}\right|^2 = |X(f)|^2\left|e^{-2j\pi ft_0}\right|^2 = |X(f)|^2 = S_x(f)$