ENIC — *Module A21* — Année 2002-2003

Samedi 1er février 2003

CORRECTION Q.R.O.C

Exercice 1

Soit $x(t) = sinc(t)$

1. Montrer que x(t) est un signal à énergie finie.

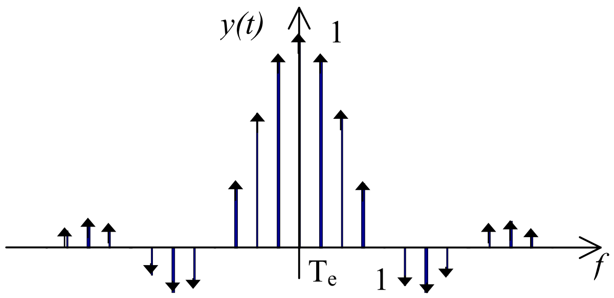
   D'après le relation de Parseval, $E_x = \int_{IR} |x(t)|^2\, dt = \int_{IR} |X(f)|^2\, df$

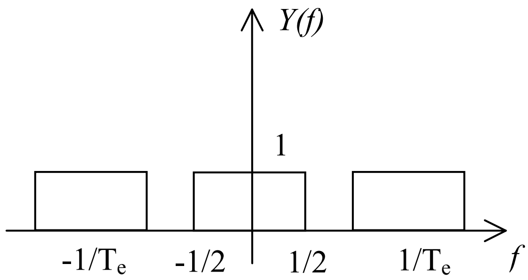
   Puisque X(f) = rect(f), $E_x = \int_{IR} |X(f)|^2\, df = 1 < \infty$ donc x(t) est un signal à énergie finie.

2. Soit $y(t) = T_e x(t). \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_e)$

   a. Calculez la transformée de Fourier de y(t). Représentez graphiquement y(t) et Y(f). Commentez.

$$Y(f) = T_e X(f) * \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$





   b. Quelle condition doit respécter T_e pour que x(t) puisse être restitué à partir de y(t).

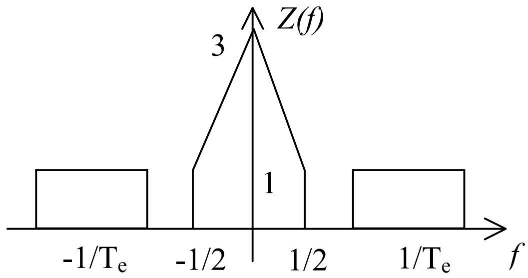
   En notant $f_e = 1/T_e$, pour restituer x(t), les répétitions de X(f) dans Y(f) ne doivent pas se chevaucher, soit $f_e - 1/2 > 1/2$ soit $f_e > 1$ ou $T_e < 1$

3. Soit z(t) = y(t) + sinc²(t/2).

   a. Calculez la transformée de z(t) et représentez la graphiquement.

   $Z(f) = TF[z(t)] = Y(f) + TF[sinc^2(t/2)]$

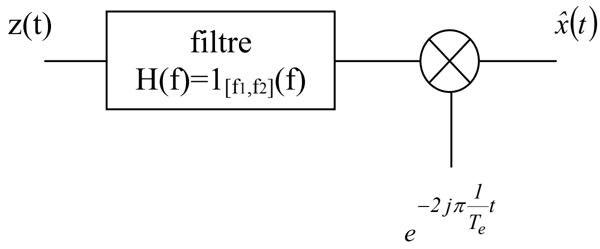
   $$Z(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect\left(f - \frac{k}{T_e}\right) + 2trian(2f)$$

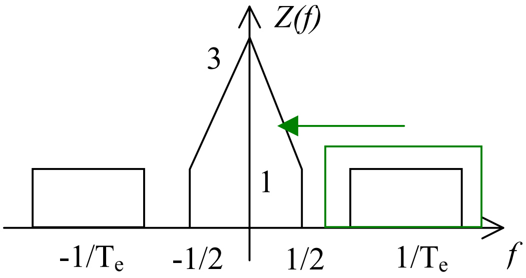


   b. Que proposez-vous pour récupérer x(t) à partir de z(t).

Pour récupérer x(t), il suffit de filtrer z(t) par un passe bande centré en 1/Te de fréquences de coupure f_1 (f_1 γ [0.5, $-0.5+1/T_e$]) et f_2 (f_2 γ [$0.5=1/T_e$, $-0.5+2/T_e$]) puis de translater la représentation en fréquence du signal résultant sur la fréquence 0.

soit $\hat{x}(t)=e^{-2j\pi\frac{1}{T_e}t}\,TF^{-1}\left[I_{[f_1,f_2]}(f)Z(f)\right]$





$$X(f)=\frac{1}{2\Delta}2\Delta\, sinc(2\Delta f)=sinc(2\Delta f)$$

Exercice 2

Soient (Ψ_1,Ψ_2)avec $\Psi_1(t)=\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t)$ et $\Psi_2(t)=\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$ une base de signaux d'un espace H.

1. Quelle est la nature énergétique de Ψ_1 et Ψ_2.

Ψ_1 et Ψ_2 étant périodique de période $T_0=1/f_0$, ils sont à puissance moyenne finie;

2. Calculer $\langle\Psi_1,\Psi_2\rangle$, $\|\Psi_1\|$et$\|\Psi_2\|$. La base est t'elle orthonormale, orthogonale ?

$$\langle\Psi_1,\Psi_2\rangle=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\Psi_1(t)\Psi_2^*(t)dt=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t)dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\sin(4\pi f_0 t)dt=0$$

car $\sin(4\pi f_0 t)$ est périodique de période $T_0/2$, de moyenne temporelle nulle et intégré sur deux périodes.

$$\|\Psi_1\|^2=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|\Psi_1(t)|^2dt=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos^2(2\pi f_0 t)dt=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\frac{1}{2}(1+\cos(4\pi f_0 t))dt$$

$$\|\Psi_1\|^2=\frac{1}{T_0}\left(\int_{-T_0/2}^{T_0/2}dt+\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos(4\pi f_0 t)dt\right)=\frac{1}{T_0}(T_0+0)=1$$

car $\cos(4\pi f_0 t)$ est périodique de période $T_0/2$, de moyenne temporelle nulle et intégré sur deux périodes.

$$\|\Psi_2\|^2=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|\Psi_2(t)|^2dt=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\sin^2(2\pi f_0 t)dt=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\frac{1}{2}(1-\cos(4\pi f_0 t))dt$$

$$\|\Psi_2\|^2=\frac{1}{T_0}\left(\int_{-T_0/2}^{T_0/2}dt-\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos(4\pi f_0 t)dt\right)=\frac{1}{T_0}(T_0-0)=1$$

pour les mêmes raisons.

(Ψ_1,Ψ_2) est donc une base orthonormale

3. Une station de base transmet à deux stations mobiles A et B les symboles a et b (constantes réelles ou complexes) qui leurs sont inconnues. Le signal reçu par la station mobile A est $x(t) = a\ \Psi_1(t)+b\,\Psi_2(t)$. En vous inspirant des questions précédentes, quelle opération doit effectuer la station mobile A sur x(t) pour récupérer le symbole a ? (même question pour la station mobile B devant récupérer le symbole b).
Pour récupérer le symbole a à partir de x(t), la base (Ψ_1, Ψ_2) étant orthonormale, il suffit de calculer le produit scalaire :
$\langle x,\Psi_1\rangle = \langle a\,\Psi_1 + b\,\Psi_2,\Psi_1\rangle = a\langle \Psi_1,\Psi_1\rangle + b\langle \Psi_2,\Psi_1\rangle = a$
de même pour b :
$\langle x,\Psi_2\rangle = \langle a\,\Psi_1 + b\,\Psi_2,\Psi_2\rangle = a\langle \Psi_1,\Psi_2\rangle + b\langle \Psi_2,\Psi_2\rangle = b$

Exercice 3

1. Soient $y_1(t) = rect(t-T/2)$, $y_2(t) = \frac{1}{T} rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

a. Calculez les transformées de Fourier de $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Représentez les graphiquement (en précisiant quelques points remarquables sur les graphiques) et commentez.

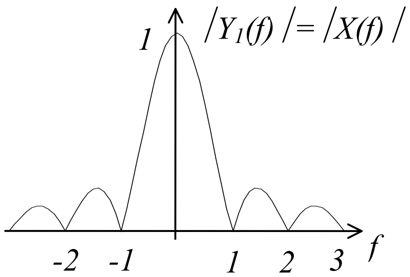
Propriété de la translation temporelle : $Y_1(f)= e^{-j\pi fT}\mathrm{sinc}(f)$
Propriété de l'homothétie et de la translation temporelle :

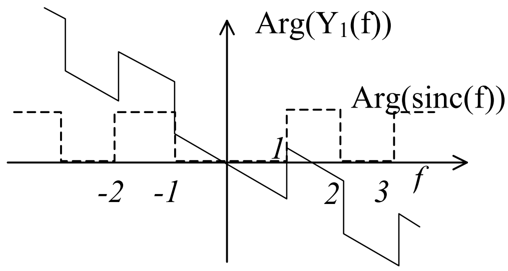
Soit $y_{21}(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$. On a par la propriété de l'homothétie $Y_{21}(f) = TF\left[rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] = T\,sinc(fT)$

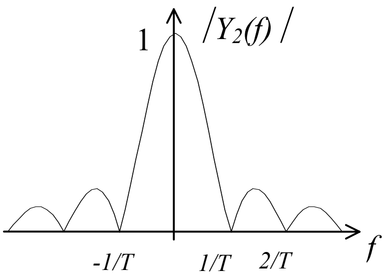
puisque $y_2(t) = \frac{1}{T} y_{21}\left(t - \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{T} rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

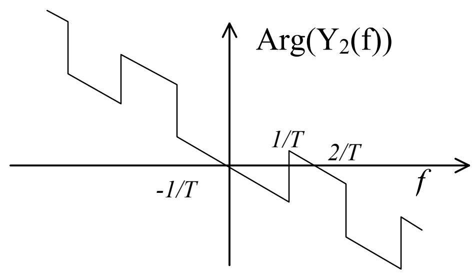
la propriété de la translation temporelle nous donne :

$$Y_2(f) = \frac{1}{T} e^{-j\pi fT} Y_{21}(f) = \frac{1}{T} e^{-j\pi fT}\, T\,sinc(fT) = e^{-j\pi fT}\,sinc(fT)$$









Commentaires:
Le décalage en temps d'un signal n'affecte que l' argument de sa réprésentation en fréquence, le module reste inchangé.
Un signal dilaté en temps est compréssé dans le domaine des fréquence et réciproquement.

b. Si T tend vers 0, que deviennent $y_2(t)$ et sa transformée de Fourier ?

Le support de $y_2(t)$ tend vers 0, et $y_2(0)$ tend vers l'infini. De plus l'intégrale de $y_2(t)$ sur IR étant toujours égale à 1 (quelque soit T), $y_2(t)$ tend vers une impulsion de Dirac $\delta(t)$ et $Y_2(f)$ tend vers 1 (le support du lobe principal tend vers l'infini).

2. Soit $Z_1(f) = \mathrm{rect}(f-B/2)$ et $Z_2(f) = \frac{1}{B} rect\left(\frac{f-B/2}{B}\right)$

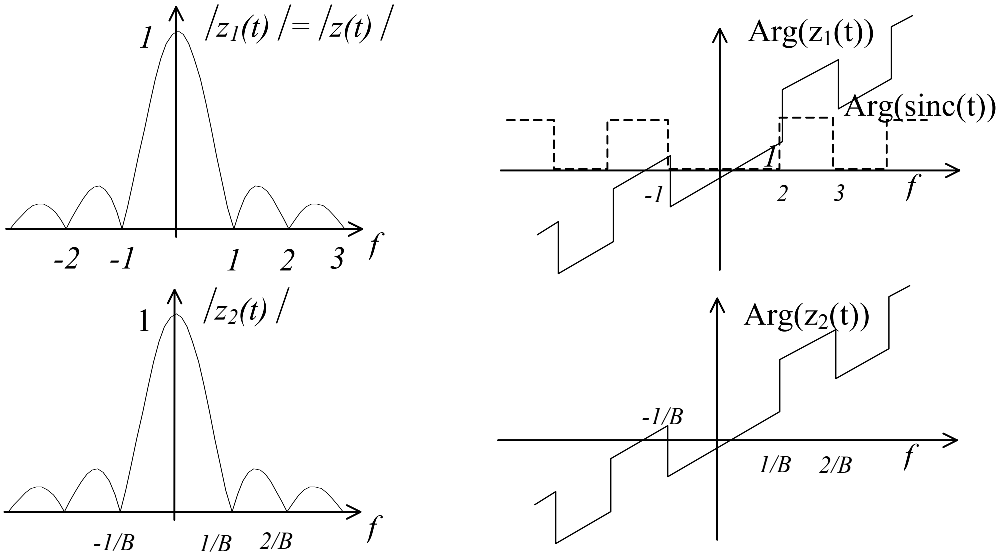
a. Calculez les transformées de Fourier inverse de $Z_1(f)$ et $Z_2(f)$. Représentez les graphiquement (en précisiant quelques points remarquables sur les graphiques) et commentez.

Propriété de la modulation : $z_1(t)= e^{j\pi Bt}\mathrm{sinc}(t)$
Propriété de l'homothétie et de la translation temporelle :
soit $Z_{21}(f) = \frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right)$ on a par la propriété de l'homothétie $z_{21}(t) = TF^{-1}\left[\frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right)\right] = sinc(Bt)$

puisque $Z_2(f) = Z_{21}\left(f - \frac{B}{2}\right) = \frac{1}{B} rect\left(\frac{f-B/2}{B}\right)$,

la propriété de la modulation permet d'obtenir :

$$z_2(t) = e^{j\pi Bt} z_{21}(t) = e^{j\pi Bt} sinc(Bt)$$



Commentaires:
Le déphasage linéaire d'un signal temporel se traduit par un décalage de sa représentation en fréquence.
Un signal dilaté en temps est compréssé dans le domaine des fréquence et réciproquement.

b. Si B tend vers 0, que deviennent $Z_2(f)$ et sa transformée de Fourier inverse?

Le support de $Z_2(f)$ tend vers 0, et $Z_2(0)$ tend vers l'infini. De plus l'intégrale de $Z_2(f)$ sur IR étant toujours égale à 1 (quelque soit B), $Z_2(f)$ tend vers une impulsion de Dirac $\delta(f)$ et $z_2(t)$ tend vers 1 (le support du lobe principal tend vers l'infini).