Telecom Lille 1 - module A21 **Année 2007-2008**
Mardi 17 octobre 2007

Q.R.O.C (1 page)
Document et matériel électronique non autorisés. Résumé de cours fourni.
Durée 2 heures

Exercice 1 :

Soit x(t) = rect (t/τ)

1 a- x(t) est-il un signal à énergie finie, à puissance moyenne finie ? Justifiez.
b- Calculer sa transformée de Fourier X(f). Représenter son spectre d'amplitude et de phase.

Soit z(t)=x(t).cos (2πt/T) avec τ>>T.

2 Calculer sa transformée de Fourier Z(f). Représenter son spectre d'amplitude.

Soit w(t), le signal z(t) périodique de période 2τ

3 a- donner l'expression de w(t)
b- Donner l'expression de sa transformée de Fourier. Représenter son spectre d'amplitude. Conclusion.

Exercice 2 :

Soit $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect(\frac{t-kT}{\tau})$ avec T>>τ

1 : Développer x(t) en série de Fourier et représenter son spectre d'amplitude |X(f)|.

2 : En déduire la fréquence et la puissance du fondamental. Même question pour l'harmonique d'ordre k=2

3 : Le signal x(t) est appliqué à l'entrée d'un filtre de fonction de transfert

$$H(f) = rect(\frac{f - 1/T}{1/2T}) + rect(\frac{f + 1/T}{1/2T})$$

Représenter la fonction de transfert |H(f)| et le spectre d'amplitude |Y(f)| du signal en sortie, y(t), du filtre. En déduire y(t). Conclusion.

$2\pi f =$

Exercice 3

1 : Montrer que les fonctions $u_1(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi F_0 t)$ et $u_2(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi F_0 t)$ forment une base orthonormale.

2 : Deux mobiles M1 et M2 émettent respectivement les signaux $x_1(t) = a_1.u_1(t)rect(\frac{t-2T_0}{4T_0})$ et $x_2(t) = a_2.u_2(t)rect(\frac{t-2T_0}{4T_0})$ où a_1 et a_2 sont des symboles appartenant à l'alphabet {-1,+1} et $T_0=1/F_0$.

- Représenter $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour des symboles d'amplitude +1.
- La station de base reçoit le somme de ces deux signaux. Proposer une méthode pour récupérer les symboles a_1 et a_2

$-2T_0 \quad 0 \quad +4T_0$

Correction

I 1) a) Efini

b) $X(f) = \tau \operatorname{sinc}(\tau f)$

2) $z(t) = x(t) \cos 2\pi\, t/T \qquad f_0 = \frac{1}{T}$

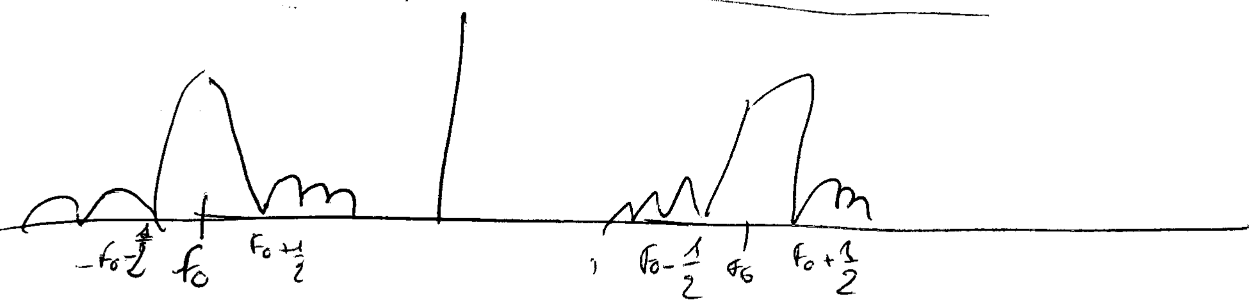
$$Z(f) = X(f) * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0) \right]$$

$$= \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0)$$

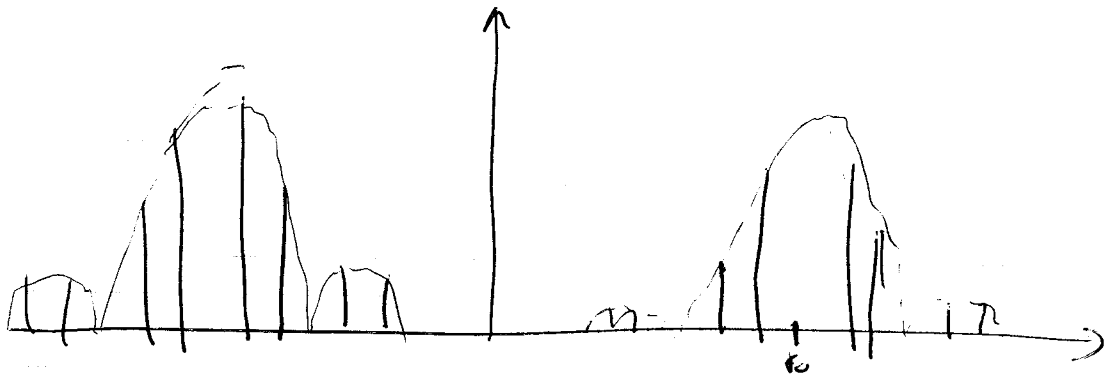
$$= \frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}(\tau(f-f_0)) + \frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}(\tau(f+f_0))$$

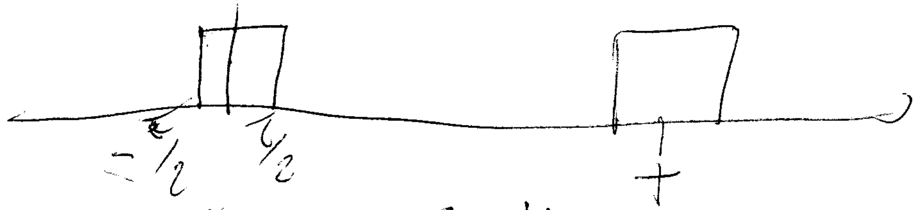
3. $w(t) = z(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\tau k)$

$$W(f) = Z(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{2\tau}\right)$$



$$w(f) = \frac{1}{4} \sum \left[\operatorname{sinc}\left(\tau\left(\frac{k}{2\tau} - f_0\right)\right) + \operatorname{sinc}\left(\tau\left(\frac{k}{2\tau} + f_0\right)\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{2\tau}\right) \right]$$





$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{2\pi j \frac{kt}{T}}$$

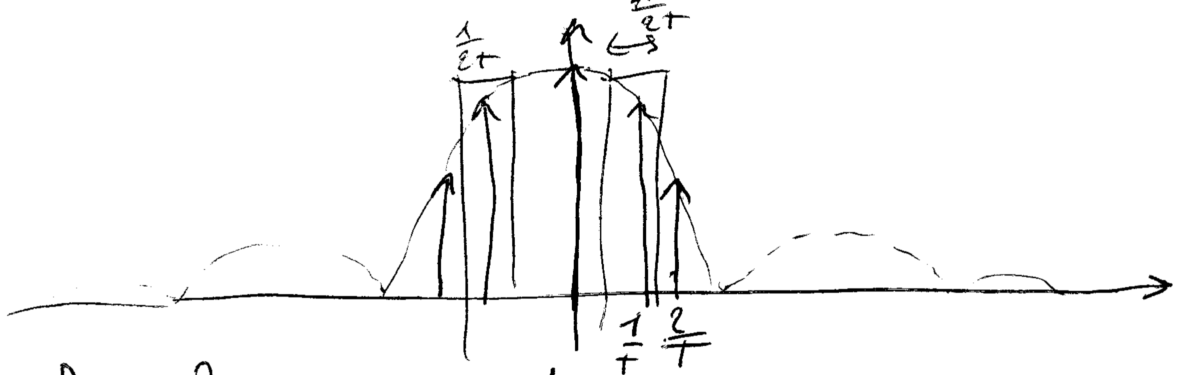
$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-2\pi j \frac{kt}{T}} \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \frac{e^{-2\pi j \tau/2T} - e^{2\pi j \tau/2T}}{-2\pi j \frac{k}{T}} \qquad k \neq 0$$

$$= \frac{\tau}{T} \frac{\sin k\pi \tau/T}{\pi k \tau/T} =$$

$$X_0 = \frac{\tau}{T}$$

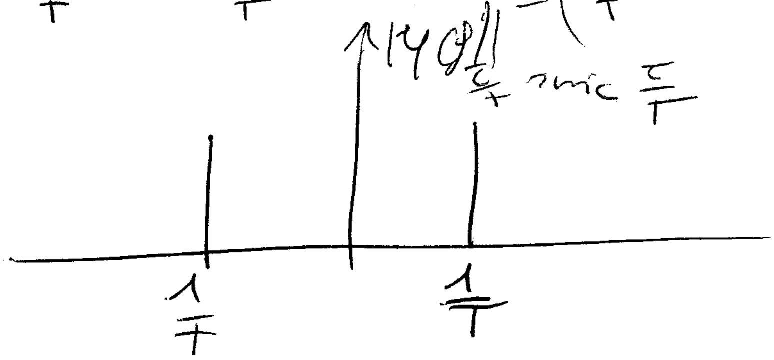
$$x(t) = \frac{\tau}{T} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc} \frac{k\tau}{T} \, e^{2\pi j \frac{kt}{T}}$$



freq fondamentale $\frac{1}{T}$

Amplitude $\frac{2\tau}{T} \operatorname{sinc} \frac{\tau}{T} \Longrightarrow P = \left(\frac{2\tau}{T} \operatorname{sinc} \frac{\tau}{T} \right)^2$

$\rightarrow$ sortie du filtre



III $u_1(t) = \sqrt{2}\cos 2\pi f_0 t$

$u_2(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi f_0 t$

$\langle u_1(t), u_2(t)\rangle = 0$

$\|u_1(t)\| = 1$

$\|u_2(t)\| = 1$

$$\langle u_1(t), u_2(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T 2\cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 t \, dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\sin 4\pi f_0 t \, dt$$

$$= 0$$

$$\|u_1(t)\| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u_1^2(t)\, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T 2\cos^2 2\pi f_0 t \, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (1 + \cos 4\pi f_0 t)\, dt} = 1$$