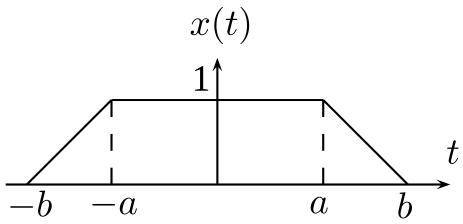
Q.R.O.C. - Module A21

1 heure

Documents et matériel éléctronique interdits

Exercice 1

Soit le signal $x(t)$ de forme trapézoïdale suivant



1. Quelle est la nature énergétique de $x(t)$? Justifier.

R1. Le signal est borné en temps et en amplitude, il s'agit donc d'un signal transitoire. De ce fait, le signal $x(t)$ est à énergie finie.

2. Calculer la dérivée de ce signal, $\frac{dx(t)}{dt}$, et en déduire $X(f)$ en utilisant la propriété de la transformée de Fourier de la dérivée d'un signal : $\text{TF}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = 2j\pi f X(f)$

R2. D'après la figure, le signal $x(t)$ a pour équation :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}t + \frac{b}{b-a} & \text{si } -b \leq t \leq -a \\ 1 & \text{si } -a < t < a \\ -\frac{1}{b-a}t + \frac{b}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La dérivée de signal est donc :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } -b \leq t \leq -a \\ -\frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour obtenir sa transformée de Fourier, on pouvait soit utiliser directement la définition de la transformée de Fourier ou soit remarquer que ce signal peut être réécrit à l'aide de fonction $\text{rect}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[-b;-a]}(t) - \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a;b]}(t) = \frac{1}{b-a}\text{rect}\left(\frac{t-(-b-a)/2}{b-a}\right) - \frac{1}{b-a}\text{rect}\left(\frac{t-(a+b)/2}{b-a}\right) \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\text{rect}\left(\frac{t+(a+b)/2}{b-a}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-(a+b)/2}{b-a}\right)\right] \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de ce signal est donc :

$$\begin{aligned} TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \frac{1}{b-a}\left\{TF\left[\text{rect}\left(\frac{t+(a+b)/2}{b-a}\right)\right] - TF\left[\text{rect}\left(\frac{t-(a+b)/2}{b-a}\right)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{b-a}\left\{e^{2j\pi f\frac{a+b}{2}}(b-a)\text{sinc}\left((b-a)f\right) - e^{-2j\pi f\frac{a+b}{2}}(b-a)\text{sinc}\left((b-a)f\right)\right\} \\ &= \text{sinc}\left((b-a)f\right)\left\{e^{j\pi f(a+b)} - e^{-j\pi f(a+b)}\right\} \end{aligned}$$

Il nous suffit maintenant d'utiliser la relation de la transformée de Fourier de la dérivée d'un signal fournie dans l'énoncé de la question pour obtenir $X(f)$

$$\begin{aligned}
X(f) &= \frac{1}{2j\pi f} TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] \\
&= \frac{1}{2j\pi f}\text{sinc}\left((b-a)f\right)\left\{e^{j\pi f(a+b)} - e^{-j\pi f(a+b)}\right\} \\
&= \text{sinc}\left((b-a)f\right)\frac{\sin(\pi f(a+b))}{\pi f} \\
&= (a+b)\text{sinc}\left((b-a)f\right)\text{sinc}\left((a+b)f\right)
\end{aligned}$$

3. A partir du résultat obtenu concernant $X(f)$, montrer que le signal $x(t)$ aurait pu être décomposer comme le résultat du produit de convolution de deux signaux élémentaires.

R3. En repartant de notre résultat obtenu pour $X(f)$, nous avons le signal $x(t)$ qui peut s'écrire comme:

$$\begin{aligned}
x(t) &= TF^{-1}[X(f)] = TF^{-1}\left[(a+b)\text{sinc}\left((b-a)f\right)\text{sinc}\left((a+b)f\right)\right] \\
&= (a+b)TF^{-1}\left[\text{sinc}\left((b-a)f\right)\right] * TF^{-1}\left[\text{sinc}\left((a+b)f\right)\right] \\
&= (a+b)\frac{1}{b-a}\text{rect}\left(\frac{t}{b-a}\right) * \frac{1}{a+b}\text{rect}\left(\frac{t}{a+b}\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\text{rect}\left(\frac{t}{b-a}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{a+b}\right)
\end{aligned}$$

Le signal $x(t)$ peut être ainsi vu comme le résultat du produit de convolution des deux fonction rectangle rect $\left(\frac{t}{b-a}\right)$ et rect $\left(\frac{t}{a+b}\right)$ à une constante multiplicative près.

4. Que deviennent $x(t)$ et $X(f)$ lorsque $a \longrightarrow 0$. Donner leur expression et représenter les graphiquement.

R4. Si $a \longrightarrow 0$, $x(t) = \text{trian}\left(\frac{t}{b}\right)$ et $X(f) = b\text{sinc}^2(bf)$

5. Dans cette question, nous prenons $a = 0$. Soient les signaux $y(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - kT)$ (avec $T > 2b$)

a. A quoi correspond le signal $y(t)$ par rapport à $x(t)$

R5a. $y(t)$ est le signal résultant de la périodisation du signal $x(t)$ à période T.

b. Calculer la transformée de Fourier du signal $y(t)$.

R5b. La tranformée de Fourier de $y(t)$ est :

$$\begin{aligned}
Y(f) &= TF[y(t)] = TF\left[x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right] \\
&= TF\left[x(t)\right] \cdot TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right] \\
&= X(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\frac{k}{T})\delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{b}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(b\frac{k}{T})\delta(f-\frac{k}{T})
\end{aligned}$$

c. Le signal $y(t)$ peuvent il être décomposé grâce aux séries de Fourier ? Si oui, en déduire ses coefficients de Fourier directement de la question précédente.

R5c. Le signal $y(t)$ étant un signal période de période T, celui-ci peut donc être décomposé grâce aux séries de Fourier. Les coefficients de Fourier de ce signal sont obtenus directement depuis la précédente question :

$$Y_k = \frac{1}{T}X(\frac{k}{T}) = \frac{b}{T}\mathrm{sinc}^2(b\frac{k}{T})$$

puisque (pour rappel) la transformée de Fourier d'un signal périodique $y(t)$ de période T est égale à $Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k\delta(f - \frac{k}{T})$ avec Y_k ses coefficients de Fourier.

d. Que deviennent $y(t)$ et $Y(f)$ si $T = b$?

R5d. Si $T = b$, la transformée de Fourier de $y(t)$ devient :

$$\begin{aligned}
Y(f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(k)\delta(f-\frac{k}{T}) \\
&= \delta(f)
\end{aligned}$$

car la fonction $\mathrm{sinc}^2(k)$ pour k entier non nul est égale à 0. De ce fait, $y(t) = 1$

Exercice 2

On considère le signal suivant :

$$x(t) = f_0 \mathrm{sinc}^2(f_0 t)$$

avec $f_0 < 0$.

1. Le signal $x(t)$ est-il à énergie finie ou à puissance moyenne finie ? En fonction de votre réponse, calculer soit sa densité spectrale d'énergie ou soit sa densité spectrale de puissance.

R1. D'après la relation de Parseval, l'énergie du signal $x(t)$ est égale à :

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$$

où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal $x(t)$. L'énergie peut donc être obtenue soit par sa représentation temporelle ou par sa représentation fréquentielle. Or,

$$X(f) = TF\left[x(t)\right] = \mathrm{trian}\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

Donc, $X(f)$ est borné en fréquence et en amplitude donc

$$\int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df = E_x \text{ est finie}$$

Le signal $x(t)$ est donc un signal à énergie finie.

2. On échantillonne le signal $x(t)$ avec la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e$. Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné

$$x_e(t) = x(t). \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

notée $X_e(f)$. Représenter graphiquement $X_e(f)$ lorsque $F_e = 3f_0$ et lorsque $F_e = f_0$.

R2. La transformée de Fourier du signal échantillonné est :

$$\begin{aligned}
X_e(f) &= TF[x_e(t)] = TF\left[x(t). \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\right] \\
&= X(f) * \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T_e}) \\
&= X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e) \\
&= F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e) \\
&= F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{trian}\left(\frac{f - kF_e}{f_0}\right)
\end{aligned}$$

Pour $F_e = 3f_0$ et$F_e = f_0$, on obtient les représentations suivantes (dans le deuxième cas, on a un repliement du spectre puisqu'on ne respecte pas la condition de Shannon, en l'occurence $X_e(f) = F_e$).

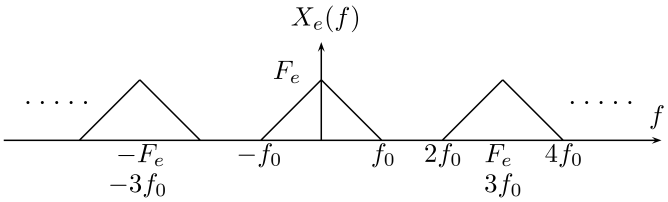


Figure 1: Premier Cas : $F_e = 3f_0$

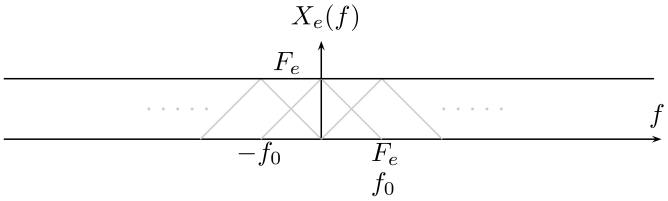


Figure 2: Deuxième Cas : $F_e = f_0$

3. On désire restituer le signal $x(t)$ en filtrant le signal échantillonné $x_e(t)$ par un filtre passe bas idéal avec pour fonction de transfert

$$H(f) = \text{rect}(\frac{f}{F_e})$$

Déterminer l'expression du signal restitué $x_r(t)$ lorsque $F_e = 3f_0$ et lorsque $F_e = f_0$. Commenter ce résultat.

R3. Le filtre passe-bas a pour fonction de transfert :

$$H(f) = \text{rect}(\frac{f}{F_e}) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{F_e}{2} \leq f \leq \frac{F_e}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas où $F_e = 3f_0$, on va récupérer le triangle centré en 0 (cf Fig. 1), c'est à dire :

$$F_e X(f) = 3f_0 X(f)$$

soit le signal temporel :

$$x_r(t) = TF^{-1}[3f_0 X(f)] = 3f_0 x(t)$$

Le signal restitué est bien le signal d'origine $x(t)$ à une constante multiplicative près.

Dans le cas où $F_e = f_0$, on récupère en sortie du filtre, le signal (cf Fig. 2) :

$$F_e H(f) = f_0 \text{rect}(\frac{f}{f_0})$$

soit le signal temporel :

$$x_r(t) = TF^{-1}[f_0 \text{rect}(\frac{f}{f_0})] = f_0^2 \text{sinc}(f_0 t)$$

Le signal restitué dans ce cas est très différent du signal d'origine $x(t)$ car la condition de Shannon n'a pas été respectée.