Examen UV Signal & Communication

Lundi 9 novembre 2015

1 feuille A4 recto-verso autorisée

Tout autre matériel interdit

Indication : Ex. 1 (1h20) - Ex. 2 (40mn)

Ex. 1: Critère de Nyquist

Dans cette partie, nous allons étudier quelle condition doit satisfaire la transformée de Fourier d'un signal pour que celui-ci s'annule à tous les instants kT ($k \in \mathbb{Z}^*$: entier relatif non nul). Cette condition, appelée critère de Nyquist, joue un rôle fondamental dans le domaine des télécommunications.

Partie I

Soit le signal $u(t) = \frac{1}{T_e}\text{sinc}^2(\frac{t}{T_e})$ avec T_e réel positif.

1. Calculer la transformée de Fourier $U(f)$ de ce signal $u(t)$.
2. Représenter graphiquement $u(t)$ et $U(f)$.
3. Ce signal est-il à énergie finie ou à puissance moyenne finie ? Justifier.
4. Que deviennent $u(t)$ et $U(f)$ si $T_e \to 0$?

Partie II

Soit $x(t)$ un signal quelconque à énergie finie. Soit $y(t) = T_e x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$ correspondant au signal $x(t)$ échantillonné à tous les instants kT_e avec $k \in \mathbb{Z}$.

1. Calculer la transformée de Fourier $Y(f)$ du signal $y(t)$.
2. Le signal $Y(f)$ admet-il un développement en série de Fourier ? Justifier et calculer le s'il existe (Attention: il s'agit d'un spectre - la variable de cette fonction est donc la fréquence, f, et non pas le temps, t - il faudra veiller à prendre en compte cet élément).
3. En déduire la condition sur $Y(f)$ (et donc sur $X(f)$ en s'appuyant sur le résultat de la question 1) pour que le signal $x(t)$ s'annule à tous les instants kT_e ($k \in \mathbb{Z}^*$: entier relatif non nul) et donc réponde au critère de Nyquist.
4. Le signal $u(t)$ défini dans la Partie I satisfait-il cette condition ? Justifier.

Ex. 2: Etude d'un système numérique

Soit $y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k u_k + 6(3)^k u_{-k-1}$ la réponse d'un signal en sortie d'un filtre de fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$

1. Calculer la transformée en Z de y_k en précisant le domaine de convergence.
2. Sans calculer la réponse impulsionnelle du filtre, quelle condition sur le domaine de convergence de sa fonction de transfert assure sa causalité.
3. Dans le cas d'un filtre causal, quelle condition sur le domaine de convergence de sa fonction de transfert assure sa stabilité.
4. Calculer la transformée en Z du signal d'entrée de ce système.