Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION AU SIGNAL DETERMINISTE

Exercices
Corrections
Chapitre 1

Yves DELIGNON

1. INTRODUCTION

Exercice 1

Classez les signaux suivants (énergie, support temporel)

1 Arect(t/T)

signal à temps continu, transitoire d'amplitude A et de support temporel [-T/2,T/2] donc à énergie finie

2 Asin2πtf

Signal à temps continu, périodique d'amplitude A de période 1/f donc à puissance moyenne finie

3 ramp(t)

Signal à temps continu

Energie et puissance moyenne infinie

4 exp -|t| t entier relatif

signal à temps discret et énergie finie car $E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2|k|} = \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k}$

$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-2}\right)^k$ série géométrique de raison e^{-2}, $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k} = \frac{1}{1-e^{-2}}$

$\sum_{k=-1}^{-\infty} e^{2k} = \sum_{k'=1}^{+\infty} e^{-2k'} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-2}\right)^{k'} - 1 = \frac{1}{1-e^{-2}} - 1$

soit $E_x = \frac{2}{1-e^{-2}} - 1 < +\infty$, x(t) est donc un signal à énergie finie.

5 $e^{at}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ a > 0

signal à temps continu et énergie finie car $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$

6 $trian(t) * \sum_{k\in Z} \delta(t-kT)$

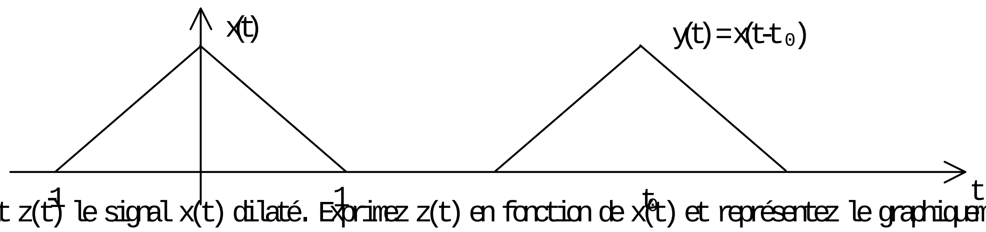
$trian(t) * \sum_{k\in Z} \delta(t-kT) = \sum_{k\in Z} trian(t-kT)$ signal à temps continu, c'est la périodisation du signal triangle à la période T.

7. trian(k/N), k entier relatif

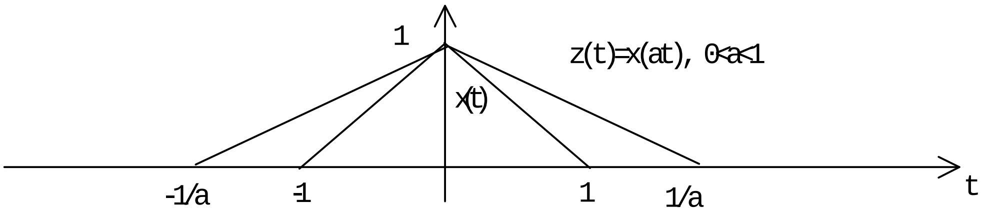
Signal à temps discret borné en temps et en amplitude donc à énergie finie.

Exercice 2

Soit x(t) = trian(t).
1 Soit y(t) le signal x(t) retardé de t_0. Exprimer y(t) en fonction de x(t) et représentez le graphiquement.



2 Soit z(t) le signal x(t) dilaté. Exprimez z(t) en fonction de x(t) et représentez le graphiquement.



Exercice 3
Soit $x(t) = \varepsilon \, \mathrm{ramp}(t).\Pi_{[0,T]}(t)$
a - x est-il un signal à énergie finie, puissance moyenne finie, autre ?

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^T \varepsilon^2 t^2 dt = \frac{\varepsilon^2 T^3}{3}$ donc x(t) signal à energie finie

b - Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt$ $\quad (x(t) * \delta(t - t_0))$ $\quad x(t) * \delta\left(\frac{t - t_0}{\alpha}\right)$ $\quad \alpha \in IR+$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

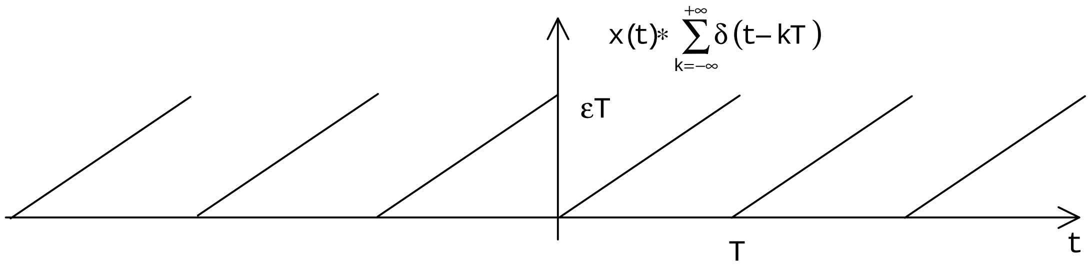
$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t - t_0 - u)du = x(t - t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - t_0 - u)du = x(t - t_0)$$

$$x(t) * \delta\left(\frac{t - t_0}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta\left(\frac{t - t_0 - u}{\alpha}\right)du = \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha v)\delta\left(\frac{t - t_0}{\alpha} - v\right)dv = \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)\delta\left(\frac{t - t_0}{\alpha} - v\right)dv = \alpha x(t - t_0)$$

par changement de variable $v = u/\alpha$

c - Calculer et tracer $x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - kT)$

$$x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT)$$



Exercice 4
Soient x, y et z trois signaux.
1. Montrer les propriétés suivantes :
$(x * y)(t) = (y * x)(t)$ commutativité de la convolution

$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)y(v)dv = (y*x)(t)$ par changement de variable v=t-u

x∗(y+z))(t)= (x∗y)(t)+ (x∗z)(t) distributivité
Porpriété immédiate en tenant compte de la linéarité de l'intégrale

2 Calculer (x∗δ)(t). Commenter le résultat.

$x(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)du = x(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-u)du = x(t)$

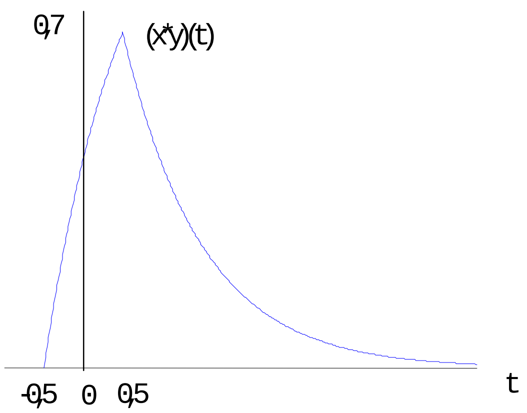
3. Soit x(t)=rect(t) et y(t)=$e^{-t}1I_{IR+}(t)$. Calculer (x∗y)(t)

$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(u)e^{-(t-u)}1I_{IR+}(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-u)}1I_{]-\infty,t]\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(u)du$

si t < -1/2 $\quad (x*y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,du = 0$

si -½ ≤ t < ½ $\quad (x*y)(t) = e^{-t}\int_{-\frac{1}{2}}^{t} e^{u}du = e^{-t}\left(e^{t} - e^{-1/2}\right) = 1 - e^{-t-1/2}$

si ½ ≤t $\quad (x*y)(t) = e^{-t}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{u}du = e^{-t}\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right)$

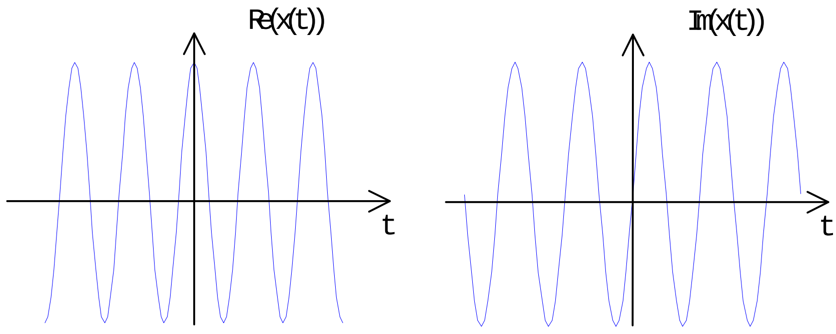


Exercice 5

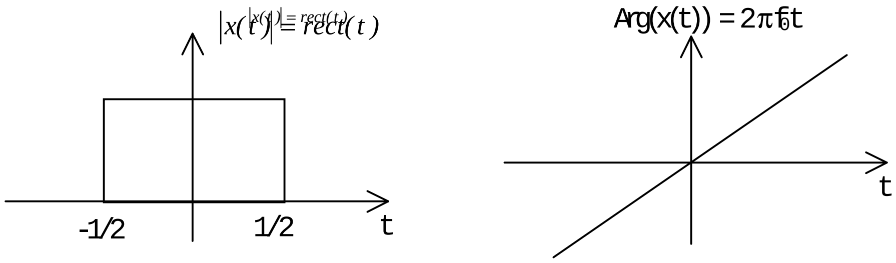
Soit x(t)=rect(t)$e^{j2\pi f_0 t}$, f_0 >>1

1. Représenter graphiquement la partie réelle et la partie imaginaire de x(t)
2. Représenter graphiquement le module et l'argument de x(t)
3 Soit y(t)=x(t)∗δ(t-5) . Représenter graphiquement x(t) et y(t).

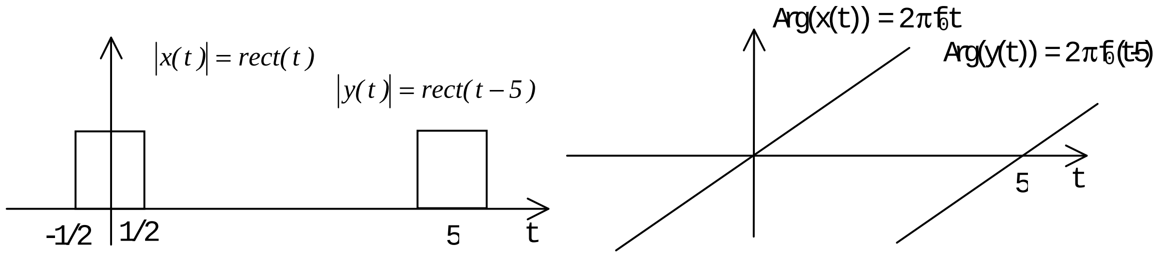
1



2.



3. $y(t)=x(t-5)$. $y(t)$ est la réplique de $x(t)$ retardée de 5.



Exercice 6

Soit $x(t)= e^{2j\pi f t}$ $f \in \mathbb{R}$

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt$ puis $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t_0+t)dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(0)\delta(t)\,dt= x(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t_0+t)\,dt= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t_0)\delta(t_0+t)\,dt = x(-t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_0+t)\,dt= x(-t_0)$$

En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)}{2} x(t)dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)}{2} x(t)\,dt= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)x(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+t_0)x(t)\,dt\right)= \frac{x(t_0)+x(-t_0)}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)}{2} x(t)\,dt= \frac{e^{2j\pi f_0 t}+e^{-2j\pi f_0 t}}{2} = \cos 2\pi f_0 t$$

Exercice 7

Soient $x_1(t)=\exp(2j\pi f_0 t)$, $x_2(t)=rect(t)$, $f_0 \gg 1$.

1 $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont t'ils des signaux à energie finie ou à puissance moyenne finie ? Justifiez votre réponse.
Puisque $x_1(t)$ est périodique de période 1/f0 et d'amplitude finie, $x_1(t)$ est un signal à puissance mpoyenne finie.
$x_2(t)$ étant un signal à support temporel borné et d'amplitude bornée, $x_2(t)$ est transitoire et d'énergie finie

2 Soient $y_1(t) = x_1(t)+x_2(t)$ et $y_2(t) = x_1(t).x_2(t)$
$y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont t'ils des signaux à energie finie ou à puissance moyenne finie ? Justifiez votre réponse

$$E_{y_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|y_1(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x_1(t)+x_2(t)\right|^2 dt = \int_{-1/2}^{+1/2} \left|x_1(t)+x_2(t)\right|^2 dt + \int_{-\infty}^{-1/2} \left|x_2(t)\right|^2 dt + \int_{1/2}^{+\infty} \left|x_2(t)\right|^2 dt$$

Puisque $\int_{-\infty}^{-1/2} \left|x_2(t)\right|^2 dt$ et $\int_{1/2}^{+\infty} \left|x_2(t)\right|^2 dt$ tendent vers l'infini, l'énergie de y_1 est infinie

$$P_{y_1} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|y_1(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left|x_1(t)+x_2(t)\right|^2 dt$$

$$P_{y_1} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-1/2} \left|x_2(t)\right|^2 dt + \frac{1}{T} \int_{1/2}^{T/2} \left|x_2(t)\right|^2 dt + \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} \left|x_1(t)+x_2(t)\right|^2 dt$$

$$P_{y_1} = \lim_{T\to+\infty} \frac{T-1}{2T} + \lim_{T\to+\infty} \frac{T-1}{2T} + 0 = 1$$

y_1 est donc un signal à puissance moyenne finie

Comme produit d'une fonction à support temporel borné et d'une fonction périodique, $y_2(t)$ a un support temporel borné. L'amplitude de $y_2(t)$ sur [-1/2,1/2] est égale à 1, $y_2(t)$ est donc un signal à énergie finie.

Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION
AU
SIGNAL DETERMINISTE

Exercices
Corrections
Chapitre 2

Yves DELIGNON

2. REPRESENTATION VECTORIELLE DES SIGNAUX

Exercice 1

Considérons les quatre signaux de durée T représentés sur la fig. 1.

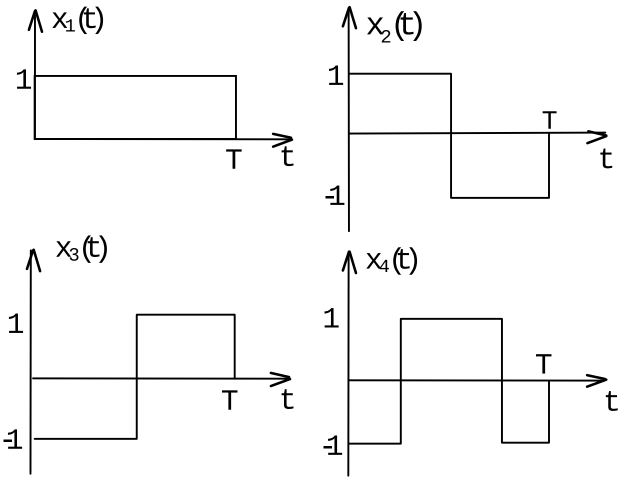


fig. 1.

1.-. Calculer la distance entre les signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$ $x_3(t)$ et $x_4(t)$

$$d(x_1,x_2) = \sqrt{\int_0^T \left|x_1(t) - x_2(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_{T/2}^T 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

$$d(x_1,x_3) = \sqrt{\int_0^T \left|x_1(t) - x_3(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{T/2} 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

$$d(x_1,x_4) = \sqrt{\int_0^T \left|x_1(t) - x_4(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{T/4} 2^2\, dt + \int_{3T/4}^T 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

$$d(x_2,x_3) = \sqrt{\int_0^T \left|x_2(t) - x_3(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{T/2} 2^2\, dt + \int_{T/2}^T 2^2\, dt} = 2\sqrt{T}$$

$$d(x_2,x_4) = \sqrt{\int_0^T \left|x_2(t) - x_4(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{T/4} 2^2\, dt + \int_{T/2}^{3T/4} 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

$$d(x_3,x_4) = \sqrt{\int_0^T \left|x_3(t) - x_4(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_{T/4}^{T/2} 2^2\, dt + \int_{3T/4}^T 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

2.-. Les signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$ $x_3(t)$ et $x_4(t)$ sont-ils orthogonaux deux à deux ?

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_0^T x_1(t) x_2(t) dt = \int_0^{T/2} 1dt - \int_{T/2}^T 1dt = 0$$

$$\langle x_1, x_3 \rangle = \int_0^T x_1(t) x_3(t) dt = -\int_0^{T/2} 1dt + \int_{T/2}^T 1dt = 0$$

$$\langle x_1, x_4 \rangle = \int_0^T x_1(t) x_4(t) dt = -\int_0^{T/4} 1dt + \int_{T/4}^{3T/4} 1dt - \int_{3T/4}^T 1dt = 0$$

$$\langle x_2, x_3 \rangle = \int_0^T x_2(t) x_3(t) dt = -\int_0^{T/2} 1dt - \int_{T/2}^T 1dt = -T$$

$$\langle x_2, x_4 \rangle = \int_0^T x_2(t) x_4(t) dt = -\int_0^{T/4} 1dt + \int_{T/4}^{T/2} 1dt - \int_{T/2}^{3T/4} 1dt + \int_{3T/4}^T 1dt = 0$$

$$\langle x_3, x_4 \rangle = \int_0^T x_3(t) x_4(t) dt = \int_0^{T/4} 1dt - \int_{T/4}^{T/2} 1dt + \int_{T/2}^{3T/4} 1dt - \int_{3T/4}^T 1dt = 0$$

3.-. Commenter les résultats des questions 1 et 2.
Les signaux x_2,x_3 et x_4 sont orthogonaux à x_1,
x_2 et x_3 sont orthogonaux à x_4,
x_2 et x_3 sont en opposition de phase.
Les signaux les plus distants sont ceux qui sont en opposition de phase.

Exercice 2
Etudier l'orthogonalité et l'orthonormalité des fonctions suivantes :
1-. $\Psi_k(t) = \sin 2.k.\pi.t$ k entier
la période est ici T=1

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \int_0^1 \sin 2.k.\pi.t \sin 2.l.\pi.t dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos 2.(k-l)\pi.t - \cos 2.(k+l)\pi.t dt$$

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \frac{1}{2}(\sin c 2.(k-l) - \sin c 2.(k+l)) = 0 \quad \text{si } k \neq l \qquad \langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{si } k = l$$

Les $\Psi_k(t) = \sin 2.k.\pi.t$ sont orthogonaux deux à deux pour k $\in$ IN et de norme $\|\Psi_k(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2-. $\Psi_k(t) = e^{j.2.k.\pi.\frac{t}{T}}$ k entier relatif
Le période est T

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{2j.k.\pi.\frac{t}{T}} e^{-2j.l.\pi.\frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{2j.(k-l)\pi.\frac{t}{T}} dt$$

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \frac{e^{j.(k-l)\pi.} - e^{-j.(k-l)\pi}}{2j(k-l)\pi.} = \frac{\sin(k-l)\pi}{(k-l)\pi.} = \sin c(k-l)$$

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = 0 \quad \text{si } k \neq l \qquad \langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = 1 \quad \text{si } k = l$$

Les { $\Psi_k(t) = e^{j.2.k.\pi.\frac{t}{T}}$, k entier relatif} sont orthogonaux deux à deux pour k $\in$ IN et de norme unité.

Exercice 3
Soit $x(t) = A\ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)$ et $y(t) = \sum_{k\in Z} x(t+kT)$

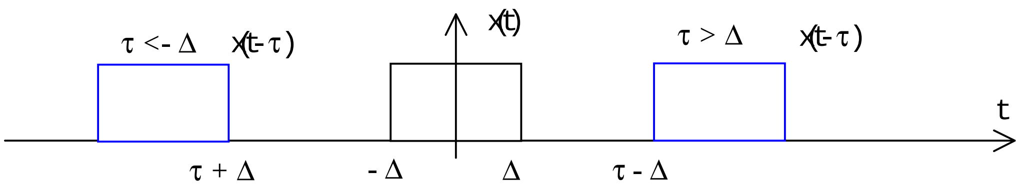
a - Calculer l'autocorrélation $C_x(\tau)$. Représenter graphiquement $x(t)$ et $C_x(\tau)$

$$C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 rect(\frac{t}{\Delta})rect(\frac{t-\tau}{\Delta})dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right]}(t) 1I_{\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right]}(t-\tau)dt$$

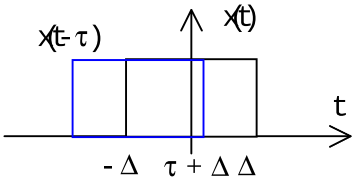
$$C_x(\tau) = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right] \cap \left[-\frac{\Delta}{2}+\tau,\frac{\Delta}{2}+\tau\right]}(t)dt$$

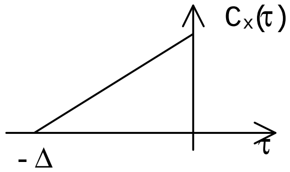
Posons $I = \left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right] \cap \left[-\frac{\Delta}{2}+\tau,\frac{\Delta}{2}+\tau\right]$

Si $\frac{\Delta}{2}+\tau < -\frac{\Delta}{2}$ ou $-\frac{\Delta}{2}+\tau > \frac{\Delta}{2}$ soit $\tau > \Delta$ ou $\tau < -\Delta$, I=∅ $C_x(\tau) = 0$

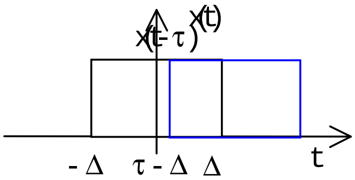


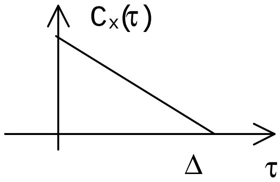
Si $-\frac{\Delta}{2} \le \frac{\Delta}{2}+\tau < \frac{\Delta}{2}$ soit $\tau \in [-\Delta, 0[$, $I = \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}+\tau\right]$ et $C_x(\tau) = A^2 \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}+\tau} dt = A^2(\Delta+\tau)$



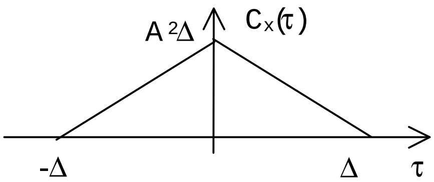


Si $-\frac{\Delta}{2} \le -\frac{\Delta}{2}+\tau < \frac{\Delta}{2}$ soit $\tau \in [0, \Delta[$, $I = \left[-\frac{\Delta}{2}+\tau, \frac{\Delta}{2}\right]$ et $C_x(\tau) = A^2 \int_{-\frac{\Delta}{2}+\tau}^{\frac{\Delta}{2}} dt = A^2(\Delta-\tau)$





Soit $C_x(\tau) = A^2\Delta\left(1-\left|\frac{\tau}{\Delta}\right|\right) = A^2\Delta trian\left(\frac{\tau}{\Delta}\right)$



b - Calculer l'autocorrélation de y(t). Représenter graphiquement x(t) et $C_y(\tau)$ pour $0<\Delta<T/2$ puis $T/2<\Delta<T$.

$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)y(t-\tau)dt$$

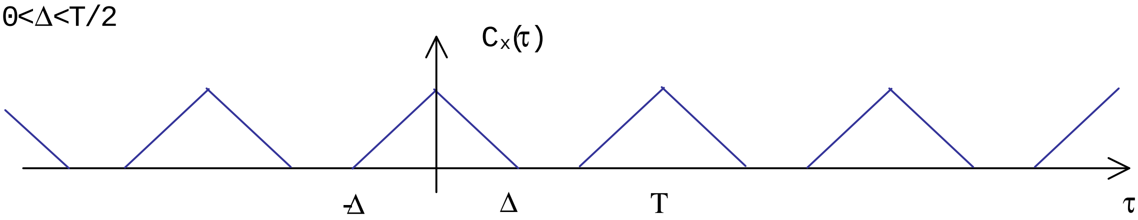
$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]}(t)y(t)y(t-\tau)dt$$

or $1I_{[-T/2,T/2]}(t)y(t)=x(t)$ donc $C_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-\tau)dt$

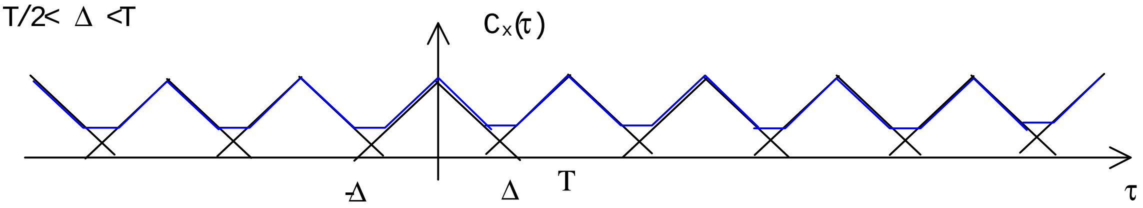
et $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$ donc $C_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau-kT)dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau-kT)dt$

soit $C_y(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_x(\tau+kT)$

$0<\Delta<T/2$



T/2< Δ <T



c - A partir des résultats précédents, calculer l'énergie de x et la puissance moyenne de y.

$E_x = C_x(0) = A^2\Delta$ $P_y = C_y(0) = A^2\Delta/T$

Exercice 4 QROC 96

Soit un émetteur-récepteur dont le signal émis a pour expression :

$x(t) = a e^{-at}\, 1I_{[0,+\infty[}(t)$ avec a réel positif.

1- Montrer que x(t) est un signal à énergie finie.

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} a^2 e^{-2at} dt = \frac{a}{2}$ fini, donc x(t) signal à énergie finie

2- Après émission, ce signal est réfléchi par une cible distante de d de l'émetteur- récepteur.
A la réception, le signal a pour expression $y(t) = e^{-a(t-5)}\, 1I_{[0,+\infty[}(t-5)$.
Calculer l'intercorrélation $C_{yx}(\tau) = <y(t), x(t-\tau)>$ entre les signaux y et x.
Tracer $C_{yx}(\tau)$ et commenter.

Remarquons que $y(t) = x(t-5)/a$, on a alors

$$C_{yx}(t) = < y(t), x(t-\tau) > = < \frac{1}{a} x(t-5), x(t-\tau) > = \frac{1}{a} C_x(\tau - 5)$$

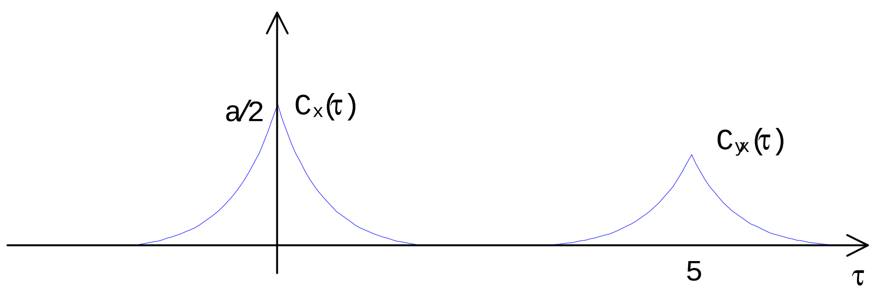
Calcul de $C_x(\tau)$

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)} 1I_{[0,+\infty[}(t) 1I_{[\tau,+\infty[}(t)dt = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)} 1I_{[0,+\infty[\cap[\tau,+\infty[}(t)dt$$

Si τ est négatif $C_x(\tau) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)} 1I_{[0,+\infty[}(t)dt = a^2 e^{a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{a}{2} e^{a\tau}$

Si τ positif $C_x(\tau) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)} 1I_{[\tau,+\infty[}(t)dt = a^2 e^{a\tau} \int_\tau^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{a}{2} e^{-a\tau}$

soit $C_x(\tau) = \frac{a}{2} e^{-a|\tau|}$ et $C_{yx}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-a|\tau-5|}$



L'intercorrélation du signal émis avec le signal reçu permet de détecter le signal émis et d'estimer le retard de propagation qui correspond au maximum de l'intercorrélation.

3- Sachant que le signal se propage à la vitesse de $300 m.s^{-1}$, calculer la distance entre la cible et le système d'émission réception.

Puisque C_x est maximal en 0, C_{yx} est maximal en τ=5 s ce qui est aussi le retard de propagation aller et retour de l'onde émise. La distance séparant la cible de l'émetteur récepteur est donc de 300*5/2=750 m

Exercice 5 QROC 97

Un signal x(t) est émis vers un récepteur à travers un canal de transmission. Le signal reçu par le récepteur est $y(t)=ax(t-t_0)+bx(t-t_1)$ avec $0 < b \ll a$ et $t_1 > t_0 > 0$, t_0 le retard dû au canal et $x(t-t_1)$ un écho du signal x(t) émis.

1. Le canal est modélisé par un filtre linéaire et invariant dans le temps.
Déterminer la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert de ce canal.

$y(t)=ax(t-t_0)+bx(t-t_1)=(a\delta(t-t_0)+b\delta(t-t_1))*x(t)$.

On a donc comme réponse impulsionnelle $h(t)=a\delta(t-t_0)+b\delta(t-t_1)$

et fonction de transfert $H(f) = TF[h(t)]=ae^{-2j\pi ft0}+ae^{-2j\pi ft1}$

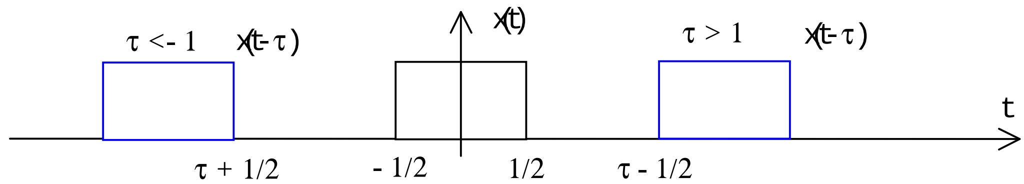
2. Supposons que le signal x(t) soit une impulsion rectangulaire, x(t)=rect(t)
   a. Calculer l'autocorrélation de x(t). Représenter graphiquement $C_x(\tau)$

$$C_x(\tau)=\langle x(t),x(t-\tau)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}rect(t)rect(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(t)1I_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(t-\tau)dt$$

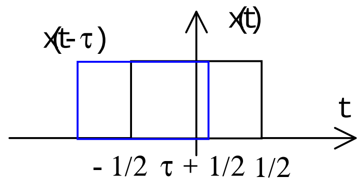
$$C_x(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cap\left[-\frac{1}{2}+\tau,\frac{1}{2}+\tau\right]}(t)dt$$

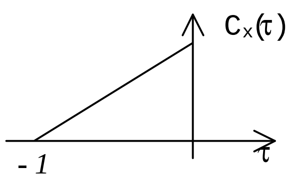
Posons $I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cap\left[-\frac{1}{2}+\tau,\frac{1}{2}+\tau\right]$

Si $\frac{1}{2}+\tau<-\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}+\tau>\frac{1}{2}$ soit $\tau > 1$ ou $\tau <-1$, $I=\emptyset$ $C_x(\tau) = 0$

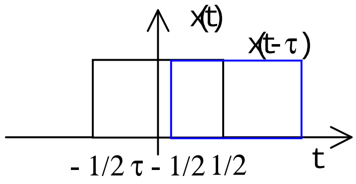


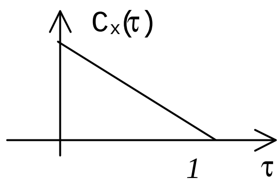
Si $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}+\tau<\frac{1}{2}$ soit $\tau\in[-1,0[$, $I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\tau\right]$ et $C_x(\tau)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\tau}dt=(1+\tau)$



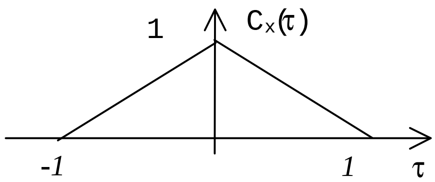


Si $-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{2}+\tau<\frac{1}{2}$ soit $\tau\in[0,1[$, $I=\left[-\frac{1}{2}+\tau,\frac{1}{2}\right]$ et $C_x(\tau)=\int_{-\frac{1}{2}+\tau}^{\frac{1}{2}}dt=1-\tau$



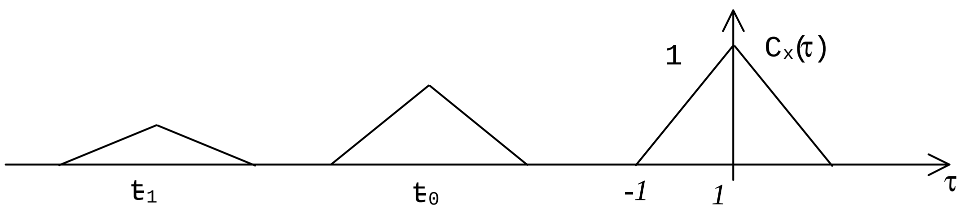


Soit $C_x(\tau) = 1 - |\tau| = trian(\tau)$



b. En déduire l'intercorrélation entre x et y, $C_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$.
Représenter graphiquement $C_{xy}(\tau)$.

$C_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle = \langle x(t), ax(t-\tau-t_0)+bx(t-\tau-t_1)\rangle = a\langle x(t), x(t-\tau-t_0)\rangle + b\langle x(t), x(t-\tau-t_1)\rangle$
$C_{xy}(\tau) = aC_{xy}(\tau+t_0) + bC_{xy}(\tau+t_1)$



c. Que proposez-vous pour estimer le retard du canal ?

Filtrer le signal reçu par un filtre de réponse impulsionnelle x(-t), ce qui revient à faire une intercorrélation du signal en sortie de canal par le signal en entrée du canal, puis détecter les pics d'intercorrélation. Ces pics correspondent en effet aux retards t_0 et t_1 des trajets multiples du canal.

Exercice 6 (Simon Haykin)
Considérons un ensemble de n fonctions réelles $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, …, $\phi_n(t)$ orthonormales sur [0,T] :

$$\int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt = \delta_K(i-j) = 1 \text{ si } i=j \text{ et } 0 \text{ autrement}$$

Soit g(t) une fonction quelconque que l'on cherche à approcher sur l'intervalle [0,T] par une combinaison linéaire des fonctions $(\phi_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$.
On définit l'erreur moyenne quadratique de l'approximation par :

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\int_0^T \left[g(t) - \sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k(t)\right]^2 dt$$

1. Le critère d'approximation est la minimisation de l'erreur quadratique moyenne ε. Montrer que les coefficients g_k de la combinaison linéaire vérifient :

$$g_k = \int_0^T g(t)\phi_k(t)dt \quad k=1, 2, \dots, n$$

D'après le principe d'orthogonalisation, la fonction approchant au mieux g(t) au sens de l'erreur moyenne quadratique minimale est telle que l'erreur d'approximation est orthogonale aux signaux la composant, c'est à dire :

$$\left\langle g(t)-\sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k(t),\phi_j(t)\right\rangle = 0$$

On a donc $\left\langle g(t),\phi_j(t)\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} g_k \left\langle \phi_k(t),\phi_j(t)\right\rangle$

Puisque $(\phi_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ est une base orthonormale, $\left\langle \phi_k,\phi_j\right\rangle = 0$ $\forall k \neq j$ et $\left\langle \phi_k,\phi_k\right\rangle = 1$

et $\left\langle g(t),\phi_j(t)\right\rangle = g_j$ soit $g_j = \int_0^T g(t)\phi_j(t)dt$ j=1, 2, …, n

2 Calculer la valeur minimale de l'erreur quadratique moyenne ε. Que se passe t'il si le nombre de termes n tend vers l'infini.

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\int_0^T \left[g(t)-\sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k(t)\right]^2 dt$$

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\left\langle g(t)-\sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k, g(t)-\sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k\right\rangle = \frac{1}{T}\left(\left\langle g(t),g(t)\right\rangle - \left\langle g(t),\sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k\right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k, g(t)\right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k, \sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k\right\rangle\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\left(\left\langle g(t),g(t)\right\rangle - 2\sum_{k=1}^{n} g_k\left\langle \phi_k(t),g(t)\right\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{k'=1}^{n} g_{k'}g_k\left\langle \phi_k(t),\phi_{k'}(t)\right\rangle\right)$$

or $\left\langle \phi_k(t),\phi_{k'}(t)\right\rangle = 0$ si $\forall k \neq k'$ et $\left\langle \phi_k(t),\phi_{k'}(t)\right\rangle = 1$ si k=k'

et $\left\langle g(t),\phi_k(t)\right\rangle = g_k$

On a donc $\varepsilon = \frac{1}{T}\left(\|g(t)\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} g_k^2 + \sum_{k=1}^{n} g_k^2\right) = \frac{1}{T}\left(\|g(t)\|^2 - \sum_{k=1}^{n} g_k^2\right)$

Lorque n tend vers l'infini, l'espace engendré par les ϕ_k coïncide avec l'espace des siganux réels à énergie finie. L'approximation dévient alors une décomposition d'une signal dans la base des ϕ_k et l'erreur tend vers zéro.

Exercice 7 QROC TTV98

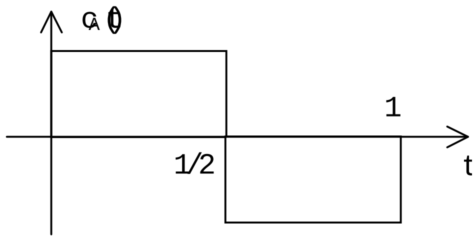
Soient A et B deux émetteurs et C un récepteur.

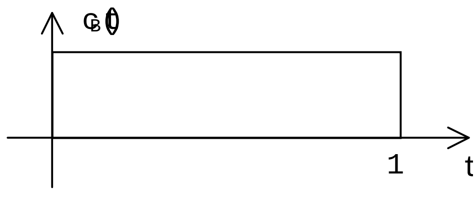
Pour A, le signal associé au symbole $a\in\{-1,1\}$ s'écrit $x_A(t)=a.c_A(t)$ avec

$$c_A(t)=\left(\mathrm{rect}\left(\frac{t-1/4}{1/2}\right)-\mathrm{rect}\left(\frac{t-3/4}{1/2}\right)\right)$$

Pour B, le signal associé au symbole $b\in\{-1,1\}$ s'écrit $x_B(t)=b.c_B(t)$ avec $c_B(t)=\mathrm{rect}(t-1/2)$

1 a. Représentez graphiquement $x_A(t)$ et $x_B(t)$.





b. $x_A(t)$ et $x_B(t)$ sont-ils des signaux à énergie finie, à puissance moyenne finie ?

x_A et x_B sont des signaux à énergie finie car ils sont bornés en temps et en amplitude, c'est à dire transitoire

2 Un récepteur C reçoit le signal $x(t) = x_A(t)+x_B(t)$ (le retard dû à la transmission est supposé négligeable).

a Calculez le produit scalaire entre $x(t)$ et $c_A(t)$ et celui entre $x(t)$ et $c_B(t)$.

$<x(t), c_A(t)> = <x_A(t)+x_B(t), c_A(t)> = <x_A(t), c_A(t)> + <x_B(t), c_A(t)>$
$= a <c_A(t), c_A(t)> + b <c_B(t), c_A(t)>$

or $< c_A(t), c_A(t) > = \int_{-\infty}^{+\infty} c_A^2(t)dt = \int_0^1 1dt = 1$ et $< c_B(t), c_A(t) > = \int_{-\infty}^{+\infty} c_A(t)c_B(t)dt = \int_0^{1/2} 1dt - \int_0^{1/2} 1dt = 0$

c_A et c_B sont orthogonaux et de norme 1.

On obtient $<x(t), c_A(t)> = a$
de même, on a $<x(t), c_B(t)> = b$

b Que proposez-vous pour retrouver à la réception les symboles a et b à partir de $x(t)$, $c_A(t)$ et $c_B(t)$.
Pour retrouver les symboles émis par A (et B), il suffit de corréler le signal reçu par le code $c_A(t)$ affecter à A (respectivement $c_B(t)$ affecter à B) puisque les signaux sont codés par des codes normés et orthogonaux. C'est le principe de l'accès multiple à répartition par code utilisé notamment sur les systèmes de communications avec les mobiles de troisième génération (UMTS, CDMA2000).

Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION AU SIGNAL DETERMINISTE

Exercices
Corrections
Chapitre 3

Yves DELIGNON

3. SERIE DE FOURIER ET TRANSFORMEE DE FOURIER

Exercice 1

Développer en série de Fourier la fonction représentée dans la fig. 1.

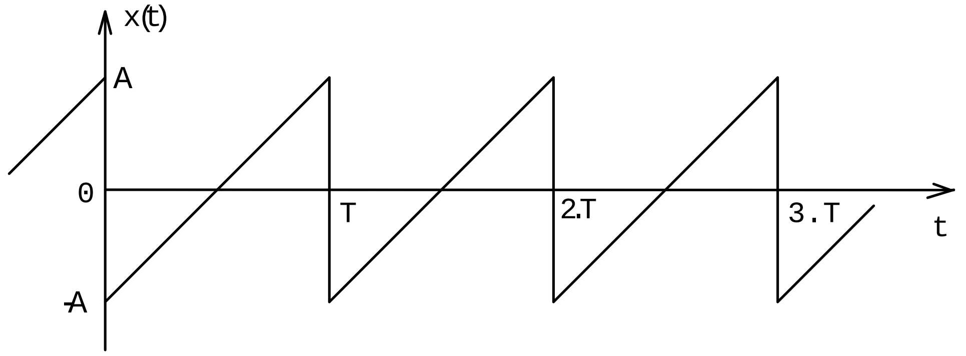


fig.1.

$$x(t)=\frac{2A}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-kT\right)$$

x(t) est périodique de période T. Son développement en série de Fourier s'écrit :

$$x(t)=\sum_{k=\infty}^{+\infty}X_k e^{2j\pi\frac{kt}{T}} \quad \text{avec} \quad X_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt$$

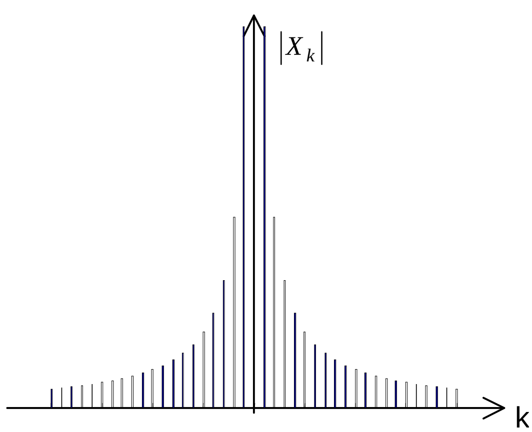
$$X_k=\frac{2A}{T^2}\int_0^T\left(t-\frac{T}{2}\right)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt=\frac{2A}{T^2}e^{-j\pi k}\int_0^T ue^{-2j\pi\frac{ku}{T}}du$$ après changement de variable u = t-T/2

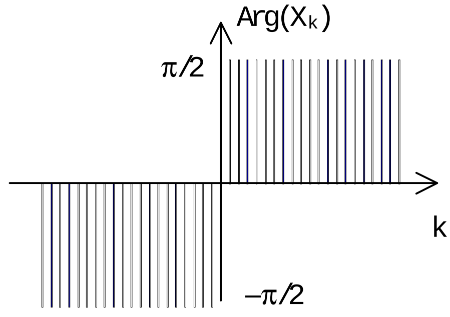
Intégration par parties. Posons f(u) = u et $g'(u)=e^{-j\frac{2\pi}{T}ku}$ on a f'(u) = 1 et $g'(u)=T\frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}ku}}{-j2\pi k}$

soit

$$X_k=\frac{2A}{T^2}e^{-j\pi k}\left(\left[\frac{T}{-2j\pi k}e^{-2j\pi\frac{ku}{T}}u\right]_0^T+\frac{T}{2j\pi k}\int_0^T e^{-2j\pi\frac{ku}{T}}du\right)$$ soit $X_k=-\frac{A}{j\pi k}$ si $k\neq 0$ et $X_0=0$

On a finalement $x(t)=\frac{jA}{\pi}\sum_{\substack{k=\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{k}e^{2j\pi\frac{kt}{T}}$





Exercice 2

1.-. Développer en série de Fourier la fonction $f(t)=\sum_{k=\infty}^{+\infty} 1\!\!\mathrm{I}_{\left[kT, kT+\frac{T}{2}\right[}(t)$.

f(t) étant un signal périodique de période T, décomposer f(t) en série de Fourier revient à calculer

$f(t)=\sum_{k=\infty}^{+\infty} X_k e^{2j\pi\frac{kt}{T}}$ avec $X_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt$

$$X_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}t}dt=\frac{1}{T}\int_0^{T/2} e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt$$

$$=\frac{1}{T}\frac{e^{-j\pi k}-1}{-2j\pi\frac{k}{T}}=\frac{1-e^{-j\pi k}}{2j\pi k} \quad \text{si k différent de 0}$$

si k pair $X_k=0$

si k impair $X_k=\frac{1}{j\pi k}$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt=\frac{1}{T}\frac{T}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{pour k=0}$$

on a donc $f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{k=\infty \\ k\ impair}}^{+\infty}\frac{1}{j\pi k}e^{2j\pi\frac{kt}{T}}$

Remarquons en posant k = 2k'+1 que cette expression s'écrit aussi

$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k'=\infty}^{+\infty}\frac{1}{j\pi(2k'+1)}e^{2j\pi\frac{(2k'+1)t}{T}}$$

2.-. En déduire la somme $S=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

Relation de Parseval $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2=\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2dt=\frac{1}{2}=P_x$

soit $P_x=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k'=\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2k'+1)^2}$ or $\sum_{k'=\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2k'+1)^2}=2S$

en conséquence $S=\frac{\pi^2}{8}$

Exercice 3

1.-. Après avoir exprimé un signal périodique sous forme de série de Fourier, calculer sa transformée de Fourier.

Considérons un signal x(t) périodique de période T. x(t) se décompose en série de Fourier comme suit :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2j\pi\frac{kt}{T}} \quad \text{avec} \quad X_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt$$

La transformé de Fourier d'un signal périodique s'écrit :

$$TF[x(t)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k TF\left[e^{2j\pi\frac{kt}{T}}\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

2.-. Calculer la série de Fourier d'un signal rectangulaire

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\ 1I_{\left[-\frac{\theta}{2}+k.T\ ,\frac{\theta}{2}+k.T\right]}(t)$$. θ<T et k entier relatif.

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{2j\pi\frac{kt}{T}} \quad \text{avec} \quad Y_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt=\frac{A}{T}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt=\frac{A\theta}{T}\, sinc\frac{k\theta}{T}$$

soit $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{A\theta}{T}\, sinc\frac{k\theta}{T} e^{2j\pi\frac{kt}{T}}$

3.-. En déduire la transformée de Fourier de y(t).

$$TF[y(t)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k TF\left[e^{2j\pi\frac{kt}{T}}\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{A\theta}{T}\, sinc\frac{k\theta}{T}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

4.-. Calculer la transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire $y_T(t)=A\ 1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]}(t)$

$$y_T(t)=A.1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]}(t)=Arect\left(\frac{t}{\theta}\right)$$

puisque TF[rect(t)] = sinc(f) on a $Y_T(f)=A\theta\, sinc(\theta f)$

5.-. Soit $x_T(t)$ un signal défini sur la période T. A l'aide du peigne de Dirac, exprimer le signal périodique x(t) (de période T) construit à partir de $x_T(t)$.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t-kT)=x_T(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

6.-. Déduire des questions 1 et 5 une relation entre transformée de Fourier de $y_T(t)$ et coefficients de la série de Fourier de y(t).

$$Y_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-2j\pi\frac{kT}{T}t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]}(t)y(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} y_T(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt=\frac{1}{T}Y_T(\frac{k}{T})$$

ce résultat est vérifié puisque $Y_T(f)=A\theta\, sinc(\theta f)$ et $Y_k=\frac{A\theta}{T}\, sinc\frac{k\theta}{T}$

Exercice 4 QROC 95

Soit le signal x(t) défini par $x(t)=\frac{1}{2\Delta}\,1I_{[-\Delta,\Delta[}(t)$

1 Calculer la transformée de Fourier X(f) de x(t)

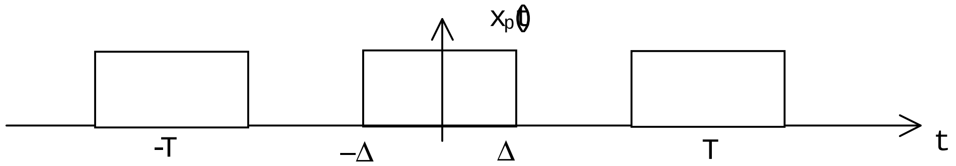
$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-2j\pi ft}dt=\frac{1}{2\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta}e^{-2j\pi ft}dt=\frac{1}{2\Delta}\left[\frac{e^{-2j\pi ft}}{-2j\pi f}\right]_{-\Delta}^{\Delta}=\frac{1}{2\Delta\pi f}\left[\frac{e^{2j\pi f\Delta}-e^{-2j\pi f\Delta}}{2j}\right]=\frac{\sin(2\pi f\Delta)}{2\Delta\pi f}$$

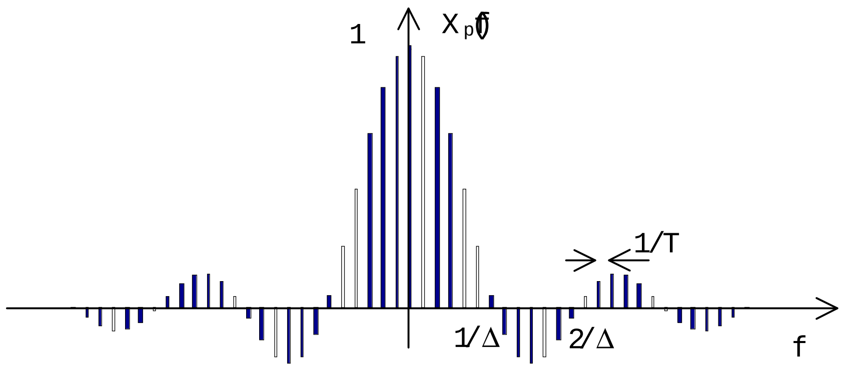
$$X(f)=\operatorname{sinc}(2\Delta f)$$

2. Soit $x_p(t)=x(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)$ avec $T\geq 2\Delta$.

a Calculer la transformée de Fourier $X_p(f)$ de $x_p(t)$ en fonction de celle de x(t). Tracer $x_p(t)$ et $X_p(f)$. Commenter.

$$X_p(f)=X(f)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k.}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(\frac{k.}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{2\Delta k.}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$





La périodisation en temps d'un signal revient à discrétiser le support de son spectre.

b. Que se passe t'il lorsque $\Delta\to 0$

Les impulsions rectangulaires $x_p(t)$ tendent vers le peigne de Dirac. $x_p(t)\xrightarrow{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)$

De même, la support du lobe principal devient IR, $X_p(f)$ tend aussi vers le peigne de Dirac.

$$X_p(t)\xrightarrow{\Delta\to 0}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Exercice 5

Un signal x(t) à énergie finie,de bande spectrale limitée à [-B,B] est élevé au carré. Le signal résultant est noté y(t) ($y(t)=x^2(t)$). Montrer que y(t) est a bande spectrale limitée sur [-2B,2B] .

On peut écrire $Y(f)=X(f)*X(f)$

Puisque le support de X(f) est [-B,B], celui de Y(f) est inclus dans le support de $1I_{[-B,B]}(f)*1I_{[-B,B]}(f)=trian(f/2B)$ qui est de support [-2B,2B].

y(t) est donc a bande spectrale limitée sur [-2B,2B] .

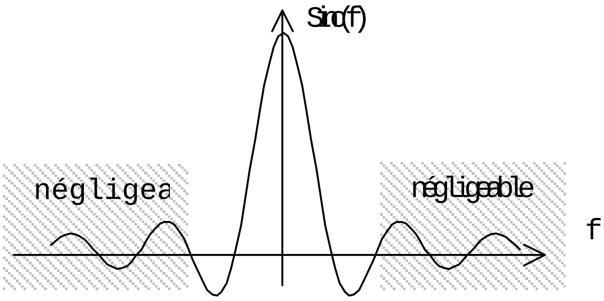
Exercice 6 QROC TTV98

Système de transmission duplex (émission de A vers B et de B vers A en même temps) sur la bande des 800kHz-1000kHz.

Soient x_A et x_B les signaux à émettre simultanément.

$y_A(t)= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right)$ $y_B(t)= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right)$ avec $a_k\in \{-1,1\}$ $b_k\in \{-1,1\}$ $\forall k$ entier relatif

1. En supposant négligeable TF[rect(t/T)] à partir du troisième lobe (inclus), quelle est la largeur du spectre de $y_A(t)$ et $y_B(t)$?



$$y_A(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k rect\left(\frac{t-kT}{T}\right) = rect\left(\frac{t}{T}\right) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t-kT)$$

$$Y_A(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k rect\left(\frac{t-kT}{T}\right) = TF\left[rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t-kT)\right] = T\, sinc(Tf) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-2j\pi fkT}$$

Le support de $Y_A(f)$ est donné par :

$$supp(Y_A(f))=supp(Sinc(Tf)) \cap supp\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-2j\pi fkT}\right)$$

puisque les deux principaux lobes du sinus cardinal sont conservés uniquement, on a supp(Sinc(Tf))=[-2/T,2/T]

De plus $\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-2j\pi fkT}\right)$ est un signal périodique, de support IR.

On a finalement supp(Y_A(f))= [-2/T,2/T] $\cap$IR=[-2/T,2/T]

et la largeur du spectre de 4/T.

2. Division en fréquence.

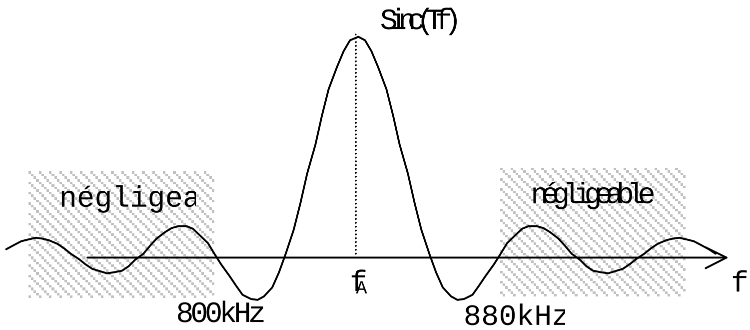
La bande de fréquence alloué au système est 800kHz-1000kHz.

a. Quelles sont les fréquences porteuses f_A et f_B pour que A émette dans la bande des 800kHz-880kHz et B émette dans la bande des 920kHz-1000kHz.

La fréquence porteuse est la fréquence centrale.
Pour A, f_A = 840kHz et pour B f_B = 960 kHz

b. En tenant compte de la question 1, que vaut T maximisant le débit de A et B?
Donnez les débits binaires de A et de B.

Pour avoir un débit le plus important possible, la durée des impulsions doit être la plus petite possible et donc sa représentation en fréquence aussi large que possible.



On a donc : $\frac{4}{T} = 80.10^3$ soit T= 50µs Débit binaire = $\frac{1}{T} = 20kbits / s$

Le duplex en fréquence est notamment utilisé dans la norme de communication mobile GSM.

3. Division temporelle

Toute la bande de fréquence est utilisée pour émettre de A vers B et pour émettre de B vers A. Le temps est subdivisé en trames de 100 intervalles de temps (IT) de durée T. Les 6 premiers IT sont réservés à l'entête, les 40 suivants pour l'émission de A vers B, suivent 14 intervalles de temps de garde puis 40 IT pour l'émission de B vers A.

a Comment émettre $y_A(t)$ et $y_B(t)$ dans la bande de fréquence 800kHz-1000kHz.
Que vaut la fréquence porteuse de A et B ?

L'idée de la division temporelle est de transmettre simultanément de A vers B puis de B vers A etc… A et B doivent donc être synchronisés, ils utilisent toutes la bande de fréquence sur l'intervalle de temps où ils émettent.
La fréquence porteuse de A est identique à celle de B. Elle vaut $f_A = f_B$ = 900kHz.

b En tenant compte de la question 1, que vaut T pour assurer un débit de transmission maximal. Donnez le débit binaire de A et B. Comparer le à ceux obtenus en 2.b.

Cette fois $\frac{4}{T} = 200.10^3$ puisque toute la bande est disponible à l'émission.
On a alors des impulsion de durée $T = 20\,\mu$s

Pendant la phase d'émission, le débit vaut 50kbits.s^{-1}
Puisqu'il faut partager ce débit avec l'autre sens de communication et tenir compte des temps de garde et des enêtes, on a comme débit

0,4*50=20kbits.s^{-1}, résultat identique à celui obtenu par division en fréquence.

Le duplex en temps est notamment utilisé dans la norme de communication sans fil numérique DECT (Digital Enhanced Cordless Telecommunication).

Entête	Transmission A vers B	Garde	Transmission B vers A
6 IT	40 IT	14 IT	40 IT

Exercice 8 QROC TTV00

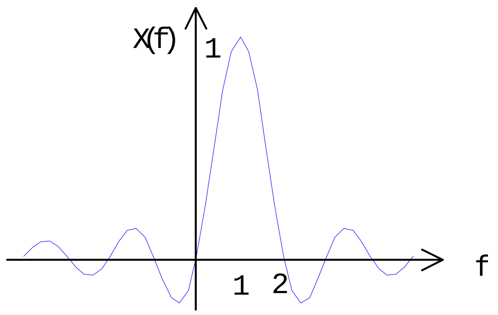
1. Soit $x(t) = e^{2j\pi t} rect(t)$

a. x(t) est-il un signal à énergie finie, à puissance moyenne finie.

x(t) est borné en temps $supp(x(t)) = [-1/2, 1/2]$ et en amplitude ($|x(t)| < 1$, x(t) est donc un signal à énergie finie

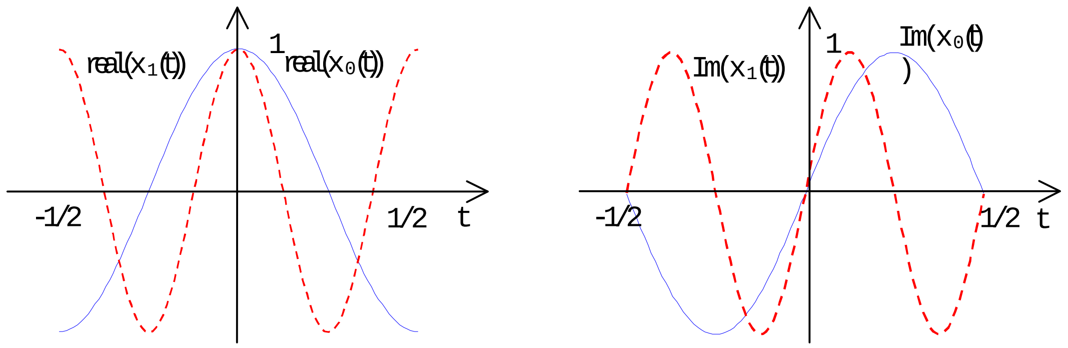
b. Calculer sa transformée de Fourier et représentez la graphiquement

X(f)=TF[rect(t)](f-1) = sinc(f-1) propriété de la modulation de la transformée de Fourier



2. Considérons deux stations mobiles émettant les signaux $x_0(t) = a_0 e^{2j\pi t} rect(t)$ et $x_1(t) = a_1 e^{4j\pi t} rect(t)$ où a_0 et a_1 sont les symboles de valeur ±1.

a. Sur deux graphiques, représenter les parties réelles et les parties imaginaires de $x_0(t)$ et $x_1(t)$.



b. Calculer < $x_0(t)$, $e^{4j\pi t}$ > puis < $x_1(t)$, $e^{2j\pi t}$ > < $x_0(t)$, $e^{2j\pi t}$ > et < $x_1(t)$, $e^{4j\pi t}$ >.

$$\left\langle x_0(t), e^{4j\pi t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t) e^{-4j\pi t} dt = a_0 \int_{-1/2}^{1/2} e^{2j\pi t} e^{-4j\pi t} dt = a_0 \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2j\pi t} dt$$

$$= a_0 \left[\frac{e^{-2j\pi t}}{-2j\pi} \right]_{-1/2}^{1/2} = a_0 \frac{e^{j\pi} - e^{-j\pi}}{2j\pi} = 0$$

$$\left\langle x_0(t), e^{2j\pi t} \right\rangle = a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t) e^{-2j\pi t} dt = a_0 \int_{-1/2}^{1/2} 1 dt = a_0$$

$$\left\langle x_1(t), e^{4j\pi t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-4j\pi t} dt = a_1 \int_{-1/2}^{1/2} 1 dt = a_1$$

$$\left\langle x_1(t), e^{2j\pi t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-2j\pi t} dt = a_1 \int_{-1/2}^{1/2} e^{4j\pi t} e^{-2j\pi t} dt = a_1 \int_{-1/2}^{1/2} e^{2j\pi t} dt$$

$$= a_1 \left[\frac{e^{2j\pi t}}{2j\pi} \right]_{-1/2}^{1/2} = a_1 \frac{e^{j\pi} - e^{-j\pi}}{2j\pi} = 0$$

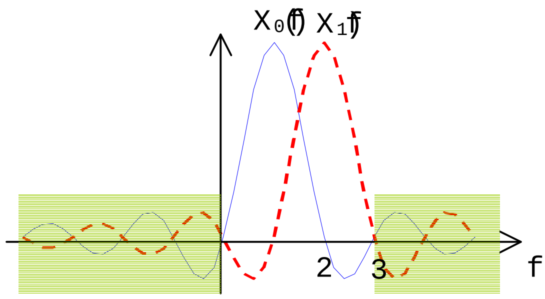
Commentaire :
$x_0(t)$ est orthogonal à $e^{4j\pi t}$ et $x_1(t)$ est orthogonal à $e^{2j\pi t}$.

c. A la station de base, on reçoit $y(t) = a_0 e^{2j\pi t} rect(t) + a_1 e^{4j\pi t} rect(t)$. En vous inspirant de la question précédente, proposez deux opérations permettant de récupérer a_0 et a_1.

Pour récupérer les symboles émis, on peut effectuer le produit scalaire de y(t) avec $e^{2j\pi t}$ et $e^{4j\pi t}$. On a en effet :

$$\left\langle y(t), e^{2j\pi t} \right\rangle = \left\langle x_0(t), e^{2j\pi t} \right\rangle + \left\langle x_1(t), e^{2j\pi t} \right\rangle = a_0 \qquad \left\langle y(t), e^{4j\pi t} \right\rangle = \left\langle x_0(t), e^{4j\pi t} \right\rangle + \left\langle x_1(t), e^{4j\pi t} \right\rangle = a_1$$

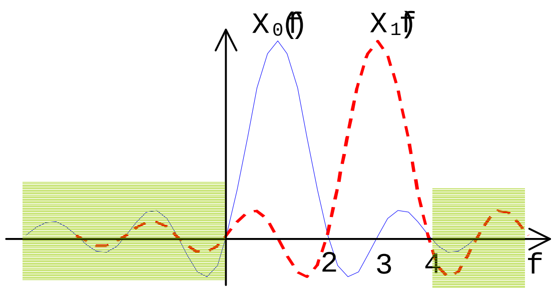
3. En considérant les lobes secondaires du sinus cardinal négligeables, quelle est la bande occupée par y(t).



La bande de fréquence est de largeur 2.

Si les symboles avaient été transmis sur des bandes de fréquences disjointes, quelle aurait été la bande de fréquence totale occupée. Concluer.

Dans ce cas la bande de fréquence est de largeur 4. Le fait d'utiliser des signaux orthogonaux permet d'économiser de la bande de fréquence.



Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION AU SIGNAL DETERMINISTE

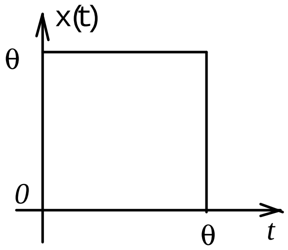
Exercices
Corrections
Chapitre 4

Yves DELIGNON

4. DENSITE SPECTRALE

Exercice 1

1.-. Calculer la fonction d'autocorrélation du signal représenté dans la figure suivante:



x(t) peut aussi s'écrire $x(t)=\theta rect\left(\dfrac{t-\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)$. Notons $z(t)=\theta rect\left(\dfrac{t}{\theta}\right)$

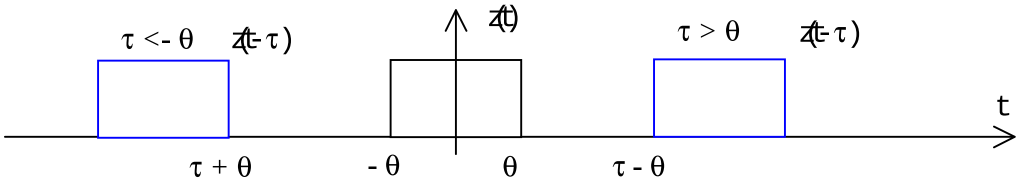
$$C_x(\tau)=\langle x(t),x(t-\tau)\rangle=\left\langle \theta rect\left(\frac{t-\frac{\theta}{2}}{\theta}\right),\theta rect\left(\frac{t-\tau-\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)\right\rangle=\left\langle z\left(t-\frac{\theta}{2}\right),z\left(t-\tau-\frac{\theta}{2}\right)\right\rangle=C_z(\tau)$$

$$C_x(\tau)=\langle z(t),z(t-\tau)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2 rect(\frac{t}{\theta})rect(\frac{t-\tau}{\theta})dt=\theta^2\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]}(t)1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]}(t-\tau)dt$$

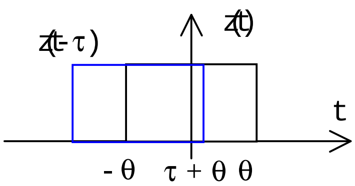
$$C_x(\tau)=\theta^2\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]\cap\left[-\frac{\theta}{2}+\tau,\frac{\theta}{2}+\tau\right]}(t)dt$$

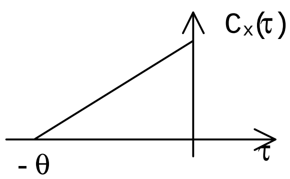
Posons $I=\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]\cap\left[-\frac{\theta}{2}+\tau,\frac{\theta}{2}+\tau\right]$

Si $\frac{\theta}{2}+\tau<-\frac{\theta}{2}$ ou $-\frac{\theta}{2}+\tau>\frac{\theta}{2}$ soit $\tau>\theta$ ou $\tau<-\theta$, $I=\varnothing$ $C_x(\tau)=0$

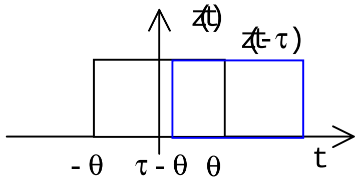


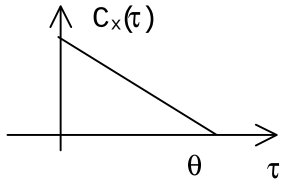
Si $-\frac{\theta}{2}\le\frac{\theta}{2}+\tau<\frac{\theta}{2}$, $I=\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}+\tau\right]$ et $C_x(\tau)=\theta^2\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}+\tau}dt=\theta^2(\theta+\tau)$



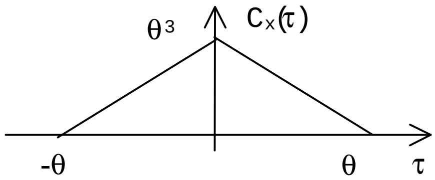


Si $-\frac{\theta}{2} \le -\frac{\theta}{2}+\tau < \frac{\theta}{2}$, $I = \left[-\frac{\theta}{2}+\tau, \frac{\theta}{2}\right]$ et $C_x(\tau) = \theta^2 \int_{-\frac{\theta}{2}+\tau}^{\frac{\theta}{2}} dt = \theta^2(\theta-\tau)$





Soit $C_x(\tau) = \theta^3\left(1-\left|\frac{\tau}{\theta}\right|\right) = \theta^3 trian\left(\frac{\tau}{\theta}\right)$



2.-. Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance (DSP) d'un signal rectangulaire périodique.

$$y(t) = \sum_{k\in Z} x(t-kT)$$

$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)y(t-\tau)dt$$

$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]}(t)y(t)y(t-\tau)dt$$

or $1I_{[-T/2,T/2]}(t)y(t)=x(t)$ donc $C_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-\tau)dt$

et $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$ donc $C_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau-kT)dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau-kT)dt$

soit $C_y(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_x(\tau+kT)$ ou encore $C_y(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_x(\tau-kT)$

La corrélation d'un signal périodique est aussi périodique de même période.

Densité spectrale de puissance

$$S_y(f) = TF[C_y(\tau)] = TF\left[C_x(\tau) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\right] = S_x(f)TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\right] = S_x(f)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$S_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_x(f)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_x\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

La densité spectrale de puissance d'un signal périodique a un support discret.

3.-. Calculer les fonctions de corrélation, les densité spectrale de puissance de

a-. $\cos(2.\pi f_0 t)$ b.-. $\sin(2.\pi f_0 t)$

a-. $x(t)=\cos(2.\pi f_0 t)$ périodique de période $T = 1/f_0$

$$C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0 t) cos(2\pi f_0 (t-\tau))dt$$

$$cos(2\pi f_0 t)cos(2\pi f_0 (t-\tau)) = \frac{1}{2}\left(cos(2\pi f_0 (2t-\tau)) + cos(2\pi f_0 \tau)\right)$$

$$C_x(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0 (2t-\tau)) + cos(2\pi f_0 \tau) dt = \frac{1}{2T}\left(\int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0 (2t-\tau))dt + \int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0 \tau)dt\right)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0 (2t-\tau))dt = 0 \text{ et } \int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0 \tau)dt = Tcos(2\pi f_0 \tau)$$

on a donc $C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \frac{1}{2}cos(2\pi f_0 \tau)$

b.-. $y(t)=sin(2.\pi.f_0.t)$

Remarquons que $y(t)=sin(2.\pi.f_0.t) = cos(2.\pi.f_0.(t-T_0/4))$

$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau)\rangle = \left\langle x(t-\frac{T_0}{4}), x(t-\frac{T_0}{4}-\tau)\right\rangle = C_x(\tau) = \frac{1}{2}cos(2\pi f_0 \tau)$$

La corrélation est invariante par translation temporelle.

Exercice 2 QROC 96

Soit $x(t) = a.e^{-at}.1I_{[0,+\infty[}(t)$ avec a réel positif

1- Montrer que x(t) est un signal à énergie finie.

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = a^2\int_0^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{1}{2a}$ fini donc x(t) signal à énergie finie.

2- Calculer la fonction d'autocorrélation de x(t)

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)}1I_{[0,+\infty[}(t)1I_{[\tau,+\infty[}(t)dt = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)}1I_{[0,+\infty[\cap[\tau,+\infty[}(t)dt$$

Si τ est négatif $C_x(\tau) = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)}1I_{[0,+\infty[}(t)dt = a^2 e^{a\tau}\int_0^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{a}{2}e^{a\tau}$

Si τ positif $C_x(\tau) = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)}1I_{[\tau,+\infty[}(t)dt = a^2 e^{a\tau}\int_\tau^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{a}{2}e^{-a\tau}$

soit $C_x(\tau) = \frac{a}{2}e^{-a|\tau|}$

3- Calculer la densité spectrale d'énergie de x(t).

$S_x(f) = TF[C_x(\tau)] = |X(f)|^2$

$X(f) = \frac{1}{1+\frac{2.j\pi.f}{a}} = \frac{a}{a+2.j\pi.f}$ (propriété de la dilatation)

soit le résultat $S_x(f) = \frac{2a^2}{a^2+4\pi^2.f^2}$

4- Que se passe-t'il lorsque a tend vers l'infini ?

Lorsque a tend vers l'infini X(f) tend vers 1 et x(t) vers l'impulsion de Dirac.
L'énergie est est uniformément répartie dans le domaine des fréquences.

Exercice 3 QROC 97

Soit $x(t)=\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ avec θ réel positif

1- Montrer que x(t) est un signal à puissance moyenne finie.

x(t) est un signal dont l'amplitude est bornée et périodique de période $T = 1/f_0$
C'est en conséquence un signal à puissance moyenne finie.

2- Calculer la fonction d'autocorrélation de x(t).

$$C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 t + \theta)\cos(2\pi f_0 (t-\tau)+\theta)dt$$

$$\cos(2\pi f_0 t + \theta)\cos(2\pi f_0 (t-\tau)+\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\pi f_0 (2t-\tau)+2\theta) + \cos(2\pi f_0 \tau)\right)$$

$$C_x(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 (2t-\tau)+2\theta) + \cos(2\pi f_0 \tau)dt = \frac{1}{2T}\left(\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi f_0 (2t-\tau)+2\theta)dt + \int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi f_0 \tau)dt\right)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi f_0 (2t-\tau)+2\theta)dt = 0 \text{ et } \int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi f_0 \tau)dt = T\cos(2\pi f_0 \tau)$$

on a donc $C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$

3- Calculer la densité spectrale de puissance de x(t). commenter.

$$S_x(f) = TF[C_x(\tau)] = \frac{1}{2}TF[\cos(2\pi f_0 \tau)] = \frac{1}{4}TF\left[e^{2j\pi f_0 \tau} + e^{-2j\pi f_0 \tau}\right] = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{4}$$

La puissance de $\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ est localisée en f_0 et $-f_0$. Ce résultat est naturel puisque la fonction $\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ est périodique de période $T=1/f_0$.

4- Soit $y(t) = x(t-T_0/2)$ avec $T_0 = 1/f_0$
Que valent la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de y(t) ?

$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau)\rangle = \left\langle x(t-\frac{T_0}{2}), x(t-\frac{T_0}{2}-\tau)\right\rangle = C_y(\tau)$$

On retrouve en conséquence la même densité spectrale de puissance pour y. Décaler un signal dans le temps ne modifie par la répartition de la puissance dans le domaine des fréquences.

Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION AU SIGNAL DETERMINISTE

Exercices
Corrections
Chapitre 5

Yves DELIGNON

5. FILTRAGE

Exercice 1 QROC 98
Soit $x(t) = e^{-at}\, 1I_{[0,+\infty[}(t)$, $a>0$
1 - x(t) est-il un signal à énergie finie, à puissance moyenne finie ?

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = a^2 \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$$ fini donc x(t) signal à énergie finie.

2 - Calculer la densité spectrale (d'énergie ou de puissance suivant le résultat de la question 1) de x(t).

$S_x(f) = TF[C_x(\tau)] = |X(f)|^2$

$$X(f) = \frac{1}{1+\frac{2.j\pi.f}{a}} = \frac{a}{a+2.j\pi.f}$$ (propriété de la dilatation)

soit le résultat $S_x(f) = \frac{2a^2}{a^2+4\pi^2.f^2}$

3 - On veut générer le signal $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} 1I_{[0,T]}(u) x(t-u) du$

Calculer la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert du filtre générant y(t) à partir de x(t).
y(t) s'écrit en fonction de la réponse impulsionnelle h(t) du filtre y(t) = (x*h)(t).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} 1I_{[0,T]}(u) x(t-u) du = \frac{1}{T} 1I_{[0,T]}(t) * x(t) = h(t) * x(t)$$

Par identification, on a $h(t) = \frac{1}{T} 1I_{[0,T]}(t)$

Le filtre est-il causal ?

Puisque h(t) est nul pour t < 0, le filtre est causal (l'effet ne précède pas la cause)

Quelle est la nature de ce filtre (passe bande, passe tout, passe-bas , passe - haut) ?

La nature spectrale du filtre dépend de la fonction de transfert

$$H(f) = TF[h(t)] = \frac{1}{T} TF\left[1I_{[0,T]}(t)\right] = \frac{1}{T} TF\left[rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)\right] = e^{-j\pi fT} \, sin\,c(Tf)$$

Les fréquences hautes sont aisni attenuées par le filtre, c'est un passe-bas.

4- Calculer la densité spectrale d'énergie de y(t).
$S_x(f) = TF[C_x(\tau)] = |X(f)|^2$

$$X(f) = \frac{1}{1+\frac{2.j\pi.f}{a}} = \frac{a}{a+2.j\pi.f}$$ (propriété de la dilatation)

soit le résultat $S_x(f) = \frac{2a^2}{a^2+4\pi^2.f^2}$

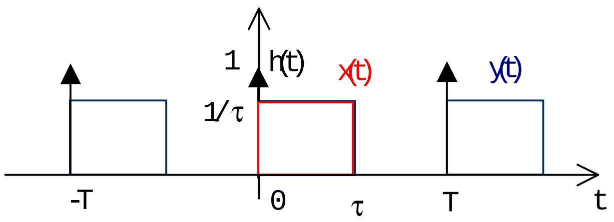
Exercice 2 QROC 96TTV

Soit x et y l'entrée et la sortie d'un filtre linéaire de reponse impulsionnelle h

avec $x(t)=\frac{1}{\tau}1I_{[0,\tau]}(t)$, $h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)$ avec $T \geq \tau$ et $y(t)=(h*x)(t)$

1.-. Calculer y(t). Représenter x(t), y(t) et h(t).

$$y(t)=(x*h)(t)=\frac{1}{\tau}1I_{[0,\tau]}(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau}1I_{[0,\tau]}(t)*\delta(t-kT)=\frac{1}{\tau}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}1I_{[0,\tau]}(t-kT)$$

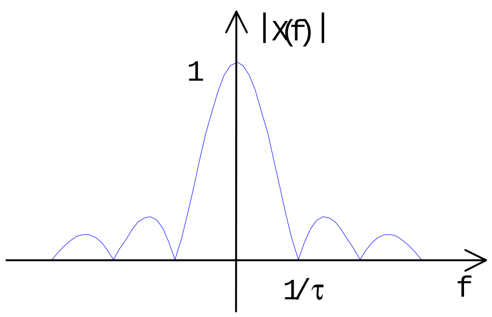


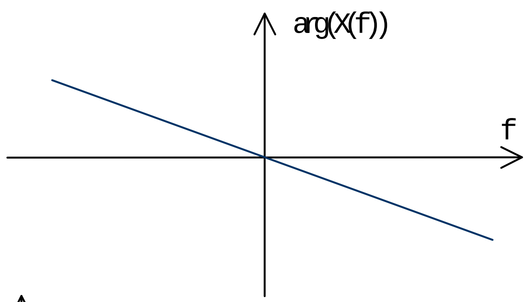
2.-. Calculer les spectres X(f) et H(f) et Y(f). Représenter X(f), H(f) et Y(f).

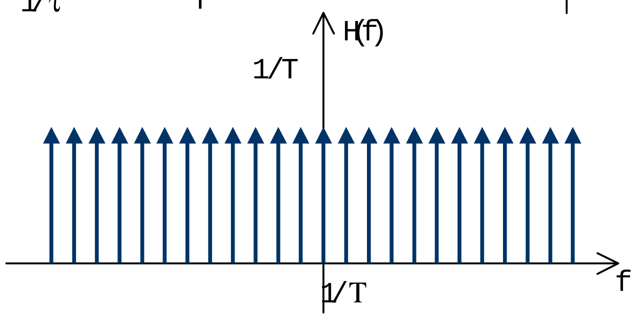
$$X(f)=\frac{1}{\tau}TF\left[rect\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)\right]=\frac{1}{\tau}e^{-j\pi f\tau}TF\left[rect\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]=\frac{1}{\tau}e^{-j\pi f\tau}\tau\, sin\,c(\tau f)=e^{-j\pi f\tau}\, sin\,c(\tau f)$$

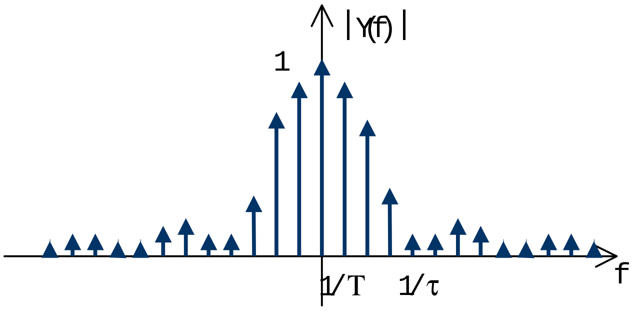
$$H(f)=TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)\right]=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$Y(f)=X(f)H(f)=X(f)TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)\right]=X(f)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$









3.-. Quel est l'effet de la convolution temporelle de x(t) par le peigne de Dirac sur le spectre Y(f).

Dans le temps, la convolution d'un signal x(t) par un peigne de Dirac a pour effet de le périodiser. Dans le domaine des fréquences, le spectre X(f) est discrétisé.

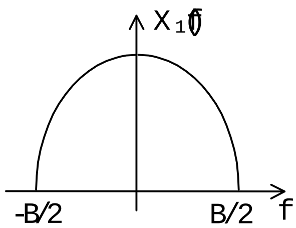
4.-. Que se passe t'il lorsque $\tau \to 0$ et lorsque $\tau = T$.

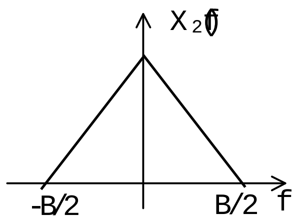
lorsque $\tau \to 0$, X(f) tend vers la constante 1 et Y(f) vers le peigne de Dirac dans le domaine des fréquences. Dans le domaine temporel, x(t) tend vers l'impulsion de Dirac et y(t) converge vers le peigne de Dirac.

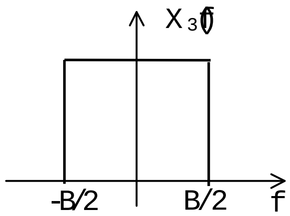
lorsque $\tau = T$, y(t) converge vers la constante 1 et Y(f) tend vers l'impulsion de Dirac $\delta(f)$.

Exercice 3 QROC97

Considérons trois signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ dont les spectres sont réels et de support]-B/2;B/2[.



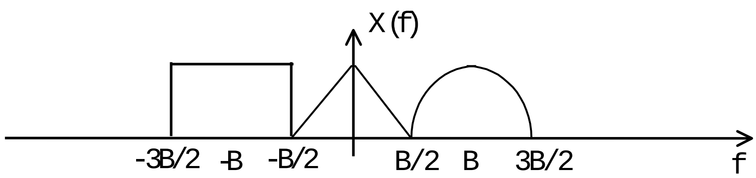




Soit $x(t) = x_1(t)e^{j2\pi Bt} + x_2(t) + x_3(t)e^{-j2\pi Bt}$

1 - Calculer le spectre X(f) et représenter le graphiquement.

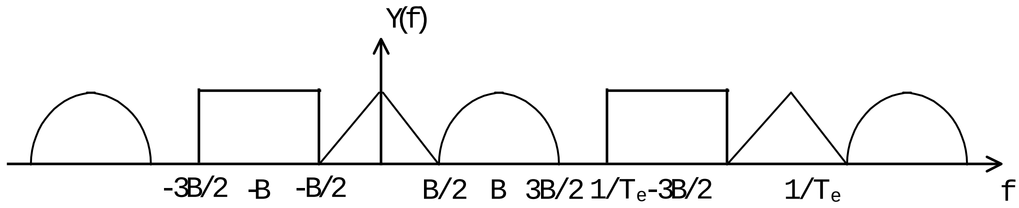
$X(f) = X_1(f-B) + X_2(f) + X_3(f+B)$ Propriété de la modulation



2 - Soit $y(t) = x(t).\ T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_e)$ l'échantillonnage de x(t)

a Calculer le spectre de Y(f), le représenter graphiquement.

$$Y(f) = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$



b Quelle condition doit satisfaire T_e pour que l'on puisse restituer x(t) à partir de y(t).

Il ne doit pas y avoir recouvrement entre répétitions des spectres, c'est à dire
$1/T_e - 3B/2 > 3B/2$ d'où $T_e < 1/3B$ (Théorème de Shannon)

c. Expliquer comment restituer $x_2(t)$ à partir de y(t).

Pour isoler le specte $X_2(f)$, on effectue un filtrage passe-bas de fréquence de coupure B/2, on a alors :
$\hat{x}_2(t) = TF^{-1}\left[Y(f).1I_{[-B/2,B/2]}(f)\right]$ si $T_e < 1/3B$ alors $\hat{x}_2(t) = x_2(t)$

Exercice 4 QROC 97

Soit $x(t) = \frac{1}{a}\,\mathrm{trian}\left(\frac{t}{a}\right)$ avec a réel positif

1 Calculer la transformée de Fourier de x(t) sachant que $TF[\mathrm{trian}(t)] = \mathrm{sinc}^2(f)$

$$X(f) = TF\left[\frac{1}{a}\,trian\left(\frac{t}{a}\right)\right] = \frac{1}{a}TF\left[trian\left(\frac{t}{a}\right)\right] = \frac{1}{a}\,a\,sinc^2(af) = sinc^2(af)$$ (propriété de l'homothétie)

2. a. Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants:

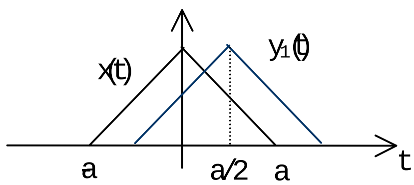
$y_1(t) = x(t) * \delta(t-a/2)$ $y_2(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$ $y_3(t) = x(t).T.\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

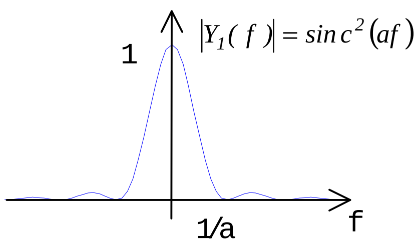
$$Y_1(f) = X(f).TF[\delta(t-a/2)] = e^{-j\pi fa}X(f)$$

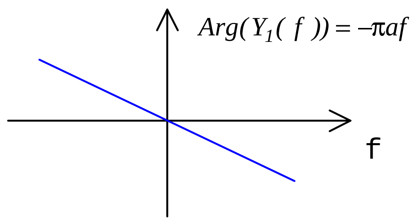
$$Y_2(f) = X(f).TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\right] = X(f).\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(\frac{k}{T})\delta(f-\frac{k}{T})$$

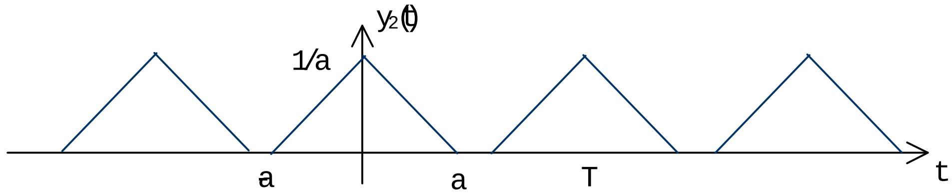
$$Y_3(f) = X(f)*T.TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\right] = X(f)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f)*\delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f-\frac{k}{T})$$

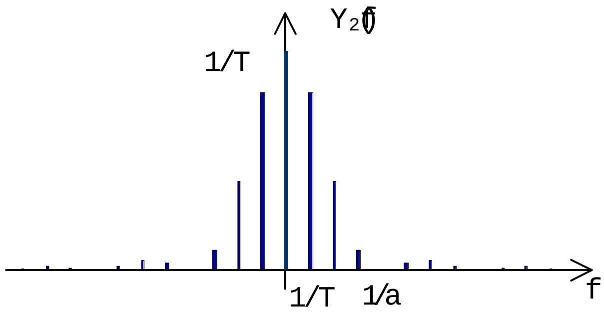
b Représenter graphiquement et interpréter les résultats dans le domaine temporel et dans le domaine spectral.

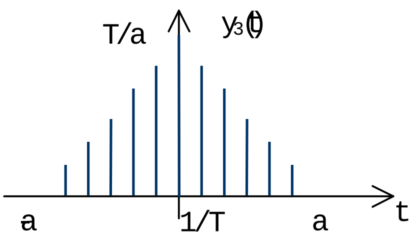


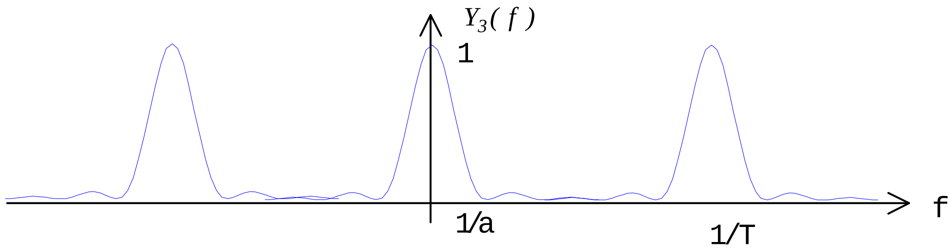












3 Que deviennent $x(t)$, $y_1(t)$ et $y_2(t)$ ainsi que leurs spectres respectifs lorsque a tend vers 0 ?

$x(t)$ et $y_1(t)$ tendent vers l'impulsion de Dirac alors que $y_2(t)$ tend vers le peigne de Dirac lorsque a tend vers zéro.
$X(f)$ et $Y_1(f)$ tendent vers la constante 1 et $Y_2(f)$ vers le peigne de Dirac en fréquence.

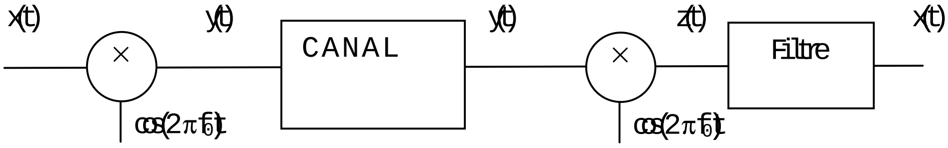
4. Quelle opération proposez-vous pour retrouver $x(t)$ à partir de $y_3(t)$ (on supposera a quelconque dans cette question)?

A l'aide d'un filtre passe bas de fréquence de coupure 1/2T, on récupère une partie du spectre de x(t). Puisque le support de X(f) est infini, ce filtre passe-bas permet seulement d'approcher x(t), approximation qui sera d'autant meilleurs que T sera petit.

Exercice 5 QROC 99

Soit $x(t)=\text{sinc}(t)$. $x(t)$ est modulé sur la fréquence porteuse f_0 pour être émis sur un canal de propagation.

Soit $y(t)$ le signal émis $y(t)=x(t).\cos 2\pi f_0 t$.

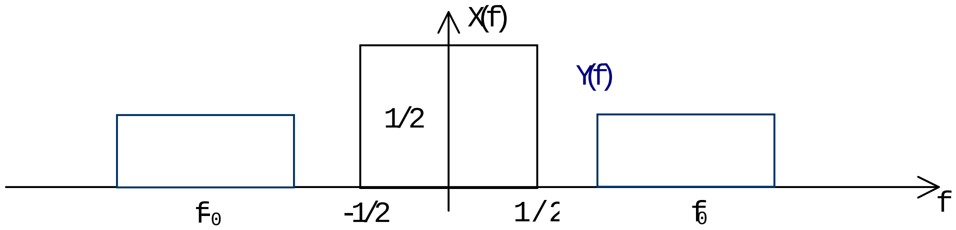


1 Calculer les spectres de x(t) et y(t). Représenter-les sur un graphique..

X(f)=TF[x(t)] = TF[sinc(t)]=rect(f)

Y(f) = TF[y(t)] = $Y(f)=TF\left[x(t).\dfrac{e^{2j\pi f_0 t}+e^{-2j\pi f_0 t}}{2}\right]=\dfrac{1}{2}TF\left[x(t).e^{2j\pi f_0 t}\right]+\dfrac{1}{2}TF\left[x(t).e^{-2j\pi f_0 t}\right]$

$$Y(f)=\frac{1}{2}\left(X(f-f_0)+X(f+f_0)\right)=\frac{1}{2}\left(rect(f-f_0)+rect(f+f_0)\right)$$



2 x(t) et y(t) sont t'ils à énergie finie, à puissance moyenne finie ?

D'après l'identité de Parseval, $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\,df$

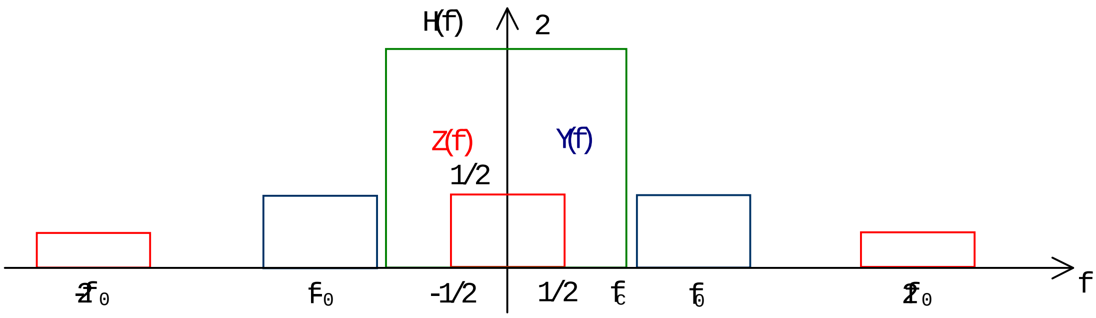
On a donc $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|rect(f)|^2\,df=1$ fini, x(t) est donc un signal à énergie finie.

De même, Y(f) est borné en fréquence et en amplitude, y(t) est donc un signal à énergie finie.

3 Après transmission, on reçoit y(t) . On calcule alors $z(t)=y(t).\cos 2\pi f_0 t$. Calculer le spectre de z(t) puis représenter le sur un graphique.

$$Z(f)=TF\left[y(t).\frac{e^{2j\pi f_0 t}+e^{-2j\pi f_0 t}}{2}\right]=\frac{1}{2}TFy\left[y(t).e^{2j\pi f_0 t}\right]+\frac{1}{2}TF\left[y(t).e^{-2j\pi f_0 t}\right]$$

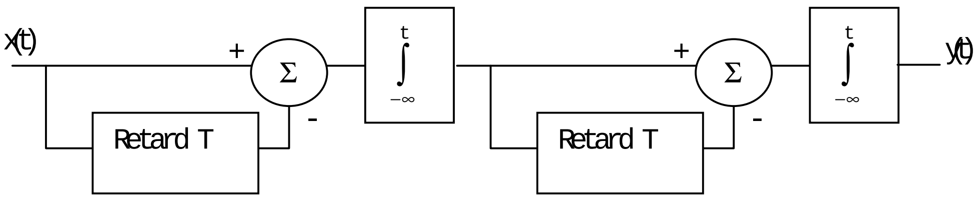
$$Z(f)=\frac{1}{2}\left(Y(f-f_0)+Y(f+f_0)\right)=\frac{1}{4}rect(f-2f_0)+\frac{1}{4}rect(f+2f_0)+\frac{1}{2}rect(f)$$



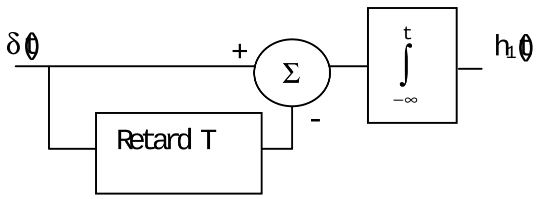
4 Proposer un filtre pour récupérer x(t) à partir de z(t) (spécifier la réponse impulsionnelle ou la fonction de transfert)

Pour retrouver $x(t_0)$ à partir de $z(t)$, il suffit d'appliquer un filtre passe-bas de fréquence de coupure comprise entre ½ et $2f_0$-1/2 et de gain 2. Voir H(f) sur graphe.

Exercice 6 (Simon Haykin)
Calculer la fonction de transfert du système linéaire représenté par le diagramme suivant :



Considérons tout d'abord le garphe suivant et injectons en entrée une impulsion de Dirac.



$$h_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)-\delta(u-T)du$$

si $t<0$ $h_1(t)=0$

si $0\leq t\leq T$ $h_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)du=1$

si $t<0$ $h_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)du-\int_{-\infty}^{t}\delta(u-T)du=1-1=0$

on a donc $h_1(t)=1I_{[0,T]}(t)$

Considérons maintenant le graphe en entier. Ce système est la mise en série de deux filtres linéaires et invariants dans le temps de réponse impulsionnelle $h_1(t)$.
On a alors comme réponse impulsionnelle du système :

$$h(t)=1I_{[0,T]}(t)*1I_{[0,T]}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{[0,T]}(u)1I_{[0,T]}(t-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{[0,T]}(u)1I_{[t-T,t]}(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{[0,T]\cap[t-T,t]}(u)du$$

Si $t<0$ ou $t>2T$ $[0,T]\cap[t-T,t]=\emptyset$ et $h(t)=0$

Si $t\in[0,T]$ $[0,T]\cap[t-T,t]=[0,t]$ et $h(t)=t$

Si $t\in[T,2T]$ $[0,T]\cap[t-T,t]=[t-T,T]$ et $h(t)=2T-t$

d'où $h(t)=T\,trian\left(\frac{t-T}{T}\right)$

Exercice 7 (Simon Haykin)
Soit $x(t)$ un signal que l'on cherche à intégrer en continu sur un intervalle de longueur T.

$$y(t)=\int_{t-T}^{t}x(\tau)d\tau$$

Montrer que $y(t)$ est la réponse à $x(t)$ d'un filtre de fonction de transfert $H(f)=\mathrm{sinc}(fT)\exp(-j\pi fT)$.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)1I_{[t,t-T]}(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)1I_{[0,T]}(t-\tau)d\tau=(x*h)(t)$$

Par identification, on a $h(t) = 1I_{[0,T]}(t) = rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$

Sachant que TF[rect(t)]= sinc(f), et à l'aide des propriétés de la translation et de la dilatation, on montre que H(f)=sinc(fT)exp(-jπfT)

Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION AU SIGNAL DETERMINISTE

Exercices
Corrections
Chapitre 6

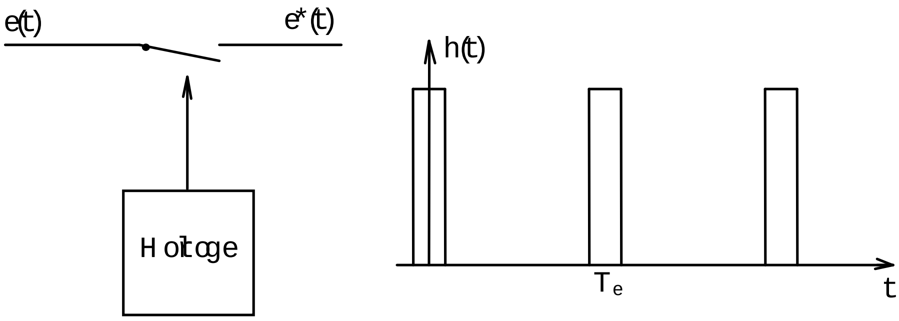
Yves DELIGNON

6. ECHANTILLONNAGE

Exercice 1

I ECHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL

Un commutateur analogique découpe un signal e(t) sinusoïdal défini par $e(t)=E.\cos(2.\pi.f_0.t)$ au rythme d'un signal d'horloge h(t) de fréquence f_e et de rapport cyclique $\alpha=\tau/T_e$.



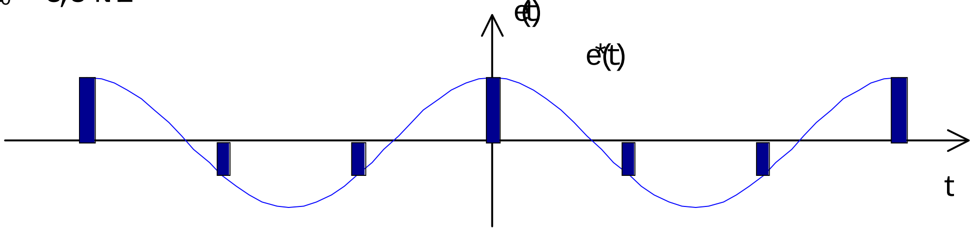
Il en résulte un signal e*(t) appelé signal échantillonné.

I.1. Etude dans le domaine temporel.

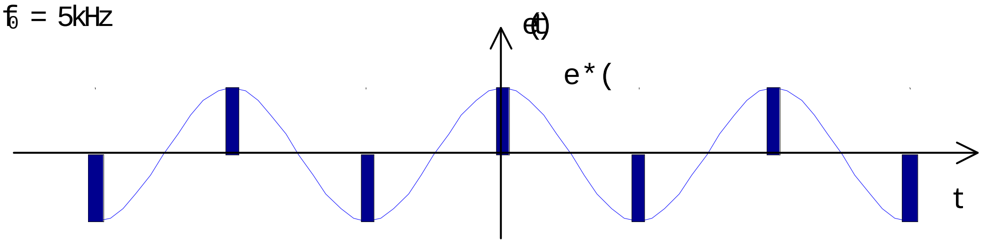
On donne f_e = 10kHz

I.1.1. Représenter, e(t) et e*(t) pour quatre fréquence de e(t) : f_0 = 3,3 kHz ; f_0 = 5kHz ; f_0 = 6,6kHz et f_0 = 10kHz.

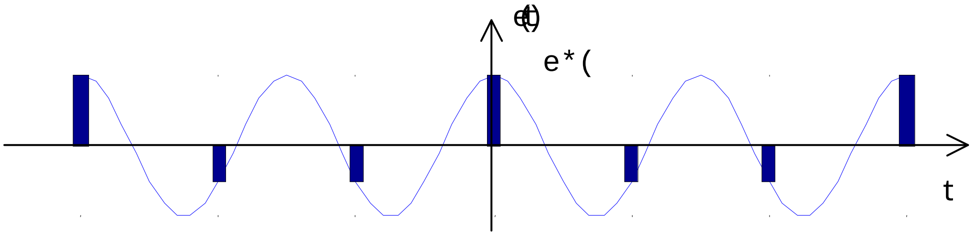
f_0 = 3,3 kHz



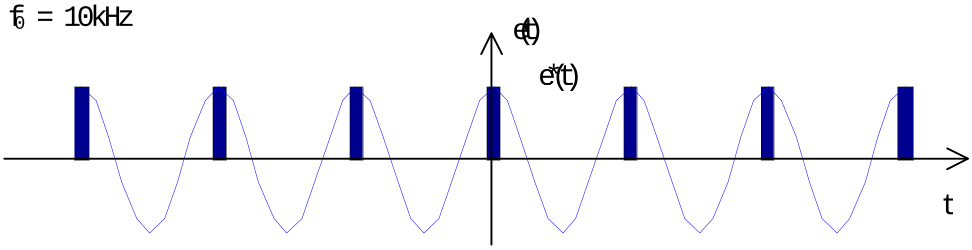
f_0 = 5kHz



f_0 = 6,6kHz



f_0 = 10kHz

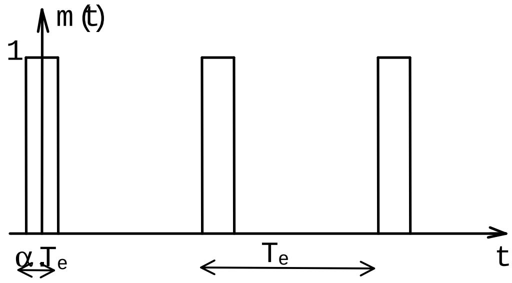


I.1.2. Déduire de ces représentations graphiques la fréquence apparente f_a du signal échantillonné et son expression en fonction de f_0 dans les quatre cas. Conclure.

f_0 = 3,3 kHz f_a=3,3 kHz
f_0 = 5kHz f_a=5 kHz
f_0 = 6,6kHz f_a=3,3 kHz
f_0 = 10kHz f_a=0 kHz

$f_a = f_0$ si $f_0 < f_e/2$
$f_a = f_e - f_0$ si $f_0 > f_e/2$

I.2. Etude dans le domaine des fréquences
L'échantillonnage est obtenu en multipliant e(t) par le signal m(t) suivant :



I.2.1. Développer en série de Fourier m(t).

m(t) étant périodique de période T_e, il peut se décomposer en série de Fourier

$$m(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_k e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}} \quad \text{avec} \quad m_k=\frac{1}{T_e}\int_{-T_e/2}^{T_e/2} m(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T_e}}dt$$

On montre que $m_k = \alpha\, sinc(\alpha k)$

Le développement en série de Fourier s'écrit alors $m(t)=\alpha \sum_{k=-\infty}^{+\infty} sinc(k\alpha)e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}}$

Puisque m(t) est une fonction paire

$$m(t)=\alpha\left(1+\sum_{k=-\infty}^{1} sinc(k\alpha)e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}}+\sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha)e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}}\right)$$

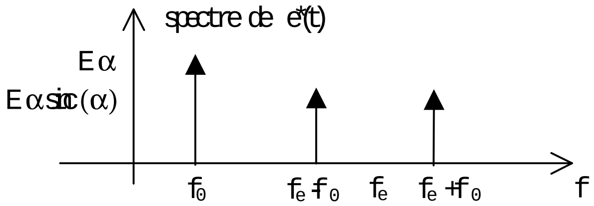
on a $\sum_{k=-\infty}^{1} sinc(k\alpha)e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}}=\sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha)e^{-2j\pi\frac{kt}{T_e}}$

et $m(t)=\alpha\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha)\left(e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}}+e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}}\right)\right)=\alpha\left(1+2\sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha)cos\left(2\pi\frac{kt}{T_e}\right)\right)$

I.2.2. En déduire le spectre de e*(t). (On le représentera en se limitant aux trois premières composantes).
On a e*(t) = $E\cos(2\pi f_0 t)m(t)$

$$e^*(t) = E\alpha\left(cos(2\pi f_0 t) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha)cos(2\pi k f_e t)cos(2\pi f_0 t)\right)$$

$$e^*(t) = E\alpha\left(cos(2\pi f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha)(cos(2\pi(f_0 + kf_e)t) + cos(2\pi(f_0 - kf_e)t))\right)$$



II. RESTITUTION D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE.

II.1. On souhaite restituer e(t) par filtrage passe-bas de e*(t). Si la fréquence d'échantillonnage f_e est fixée, quelle est la valeur maximale admissible de la fréquence f_0 de e(t) ?

Pour restituer par filtrage passe-bas les raies en en f_0 et $-f_0$, il faut que $f_0 < f_e - f_0$, soit $f_0 < f_e/2$

II.2. Quelle est alors la fréquence de coupure du filtre passe bas idéal qui permet de restituer une image de e(t) ?

Pour restituer uniquement les raies en f_0 et $-f_0$, on applique un filtre passe bas de fréquence de coupure comprise entre f_0 et $f_e - f_0$. La restitution de e(t) est donc possible si et seulement si $f_0 < f_e - f_0$ soit $f_e > 2f_0$.

II.3. Montrer que l'on retrouve les résultats de la question I.1.2.

Si la condition $f_0 < f_e/2 = 5kHz$ est vérifiée, on récupère un signal de fréquence $f_a = f_0$
Si ce n'est pas le cas, on récupère la raie $f_a = f_e - f_0$

Ainsi on retrouve les résultats de la question I.1.2

f_0 = 3,3 kHz f_a=3,3 kHz
f_0 = 5kHz f_a=5 kHz
f_0 = 6,6kHz f_a=3,3 kHz
f_0 = 10kHz f_a=0 kHz

III. ECHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL PERIODIQUE NON SINUSOÏDAL

Le signal e(t) découpé par le commutateur analogique est maintenant de la forme $e(t) = E\left|cos2\pi f_0 t\right|$ avec f_0 = 1kHz

III.1. Quelle est la fréquence f_1 de e(t) ?

La période de e(t) est moitié plus petite que celle de $cos2\pi f_0 t$, c'est à dire $T_1 = T_0/2$. On a donc $f_1 = 2f_0 = 2kHz$

III.2. A partir de quel rang n l'amplitude des harmoniques est-elle au moins 100 fois plus faible que celle du fondamental ?

Calcul des harmoniques

$e(t) = E\left|\cos 2\pi f_0 t\right|$ $\quad e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2j\pi f_1 kt} = X_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi f_1 kt)$ car e(t) est paire

$$X_k = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e(t)e^{-2j\pi f_1 kt}dt = \frac{f_1 E}{2}\left(\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi(kf_1 - f_0)t}dt + \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi(kf_1 + f_0)t}dt\right)$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi f_0(2k-1)t}dt = \left[\frac{e^{-2j\pi f_0(2k-1)t}}{-2j\pi f_0(2k-1)}\right]_{-T_1/2}^{T_1/2} = \frac{e^{j\pi f_0(2k-1)T_1} + e^{-j\pi f_0(2k-1)T_1}}{2j\pi f_0(2k-1)}$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi f_0(2k-1)t}dt = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}(2k-1)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(2k-1)}}{2j\pi f_0(2k-1)} = \frac{-2j(-1)^k}{2j\pi f_0(2k-1)} = \frac{(-1)^k}{\pi f_0(1-2k)}$$

De même $\displaystyle\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi(kf_1+f_0)t}dt = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}(2k+1)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(2k+1)}}{2j\pi f_0(2k+1)} = \frac{(-1)^k}{\pi f_0(1+2k)}$

$$X_k = \frac{Ef_1}{2}\left(\frac{(-1)^k}{\pi f_0(1-2k)} + \frac{(-1)^k}{\pi f_0(1+2k)}\right) = \frac{2E}{\pi}\frac{(-1)^k}{(1-4k^2)}$$

soit $\displaystyle e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2j\pi f_1 kt} = \frac{2E}{\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(1-4k^2)}\cos(2\pi f_1 kt)\right)$

On cherche n tel que $\left|X_n\right| \le \dfrac{\left|X_1\right|}{100}$

or $\left|X_1\right| = \dfrac{4E}{3\pi}$ on a alors $\left|\dfrac{(-1)^k}{1-4k^2}\right| \le \dfrac{1}{300}$ soit $100 \le \left|1-4k^2\right|$ ou encore $k \ge \dfrac{\sqrt{299}}{4} = 8{,}64$

On peut alors négliger les harmoniques d'ordre supérieurs ou égal à 8 et ainsi ne conserver que les huit premières harmoniques.

En déduire la fréquence f_m, à partir de laquelle on peut considérer qu'il n'y a plus de raies spectrales pour e(t).

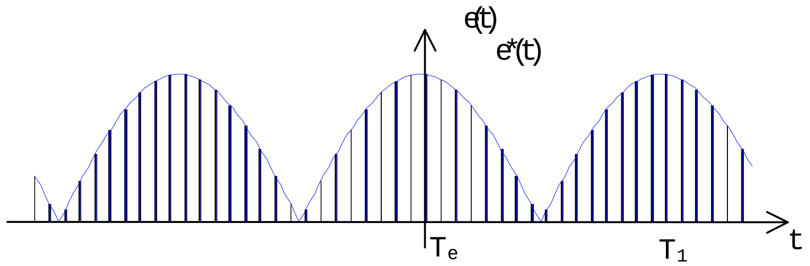
$f_m = 8f_1$ = 16kHz

III.3. Quelle est alors la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage f_e qu'il faut choisir ?

D'après Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieur à $2f_m$=32kHz

Donner alors le nombre d'échantillons nécessaires et représenter e*(t) dans les conditions limites.

Pour une fréqunec d'échantillonnage de 32kHz, on a 16 (=32/2) échantillons par périodes.



Exercice 2 QROC 98

Soit le signal $x(t)=2\alpha\,\mathrm{sinc}(2\alpha t)$

1. $X(f)=TF[x(t)](f)$ est-il à support borné ? Quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage ?

   En appliquant la propriété de l'homothétie, on a $X(f)=rect\left(\frac{f}{2\alpha}\right)$

   La fréquence maximale de x(t) étant, la fréquence minimale d'échantillonnage est 2α.

2. Soit un échantillonneur moyenneur de x(t) défini par:

   $$\hat{x}(t)=T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}y(kT)\delta(t-kT) \text{ avec } y(t)=x(t)*\frac{1}{\theta}rect(\frac{t}{\theta}) \text{ et } \theta \ll T,\ \theta<1/\alpha$$

   Montrer que $\hat{x}(t)$ peut se mettre sous la forme $\hat{x}(t)=\frac{T}{\theta}\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right)*x(t)\right].\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

   On peut écrire $\hat{x}(t)=T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}y(kT)\delta(t-kT)=T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}y(t)\delta(t-kT)=Ty(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

   or $y(t)=x(t)*\frac{1}{\theta}rect(\frac{t}{\theta})$, d'où $\hat{x}(t)=\frac{T}{\theta}\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right)*x(t)\right].\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

3. En déduire le spectre $\hat{X}(f)$ de $\hat{x}(t)$ et représenter le graphiquement.

   Que se passe t'il lorsque θ tend vers 0 ?

   $$\hat{X}(f)=TF\left[\frac{T}{\theta}\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right)*x(t)\right]\right]*TF.\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\right]=\frac{T}{\theta}\left[TF\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right)\right]X(f)\right]*\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

   $$TF\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right)\right]=\theta\ sinc(\theta f)$$

   et

   $$\hat{X}(f)=sinc(\theta f)X(f)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}sinc\left(\theta\left(f-\frac{k}{T}\right)\right)X\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

   Lorsque θ tend vers 0, $\frac{1}{\theta}rect(\frac{t}{\theta})$ tend vers une impulsion de Dirac et $\mathrm{sinc}(\theta f)$ tend vers 1.

   L'échantillonnage tend vers l'idéal.

4. Sachant que $\mathrm{sinc}(\theta f)$ peut être considéré comme constant pour $f\in\left[-\frac{1}{3\theta},\frac{1}{3\theta}\right]$, quelle condition doit vérifier θ pour que x(t) puisse être récupéré par filtrage passe-bas ?

Pour que l'on puisse retrouver x(t) à partir d'un filtrage passe-bas du signal échantillonné, $\mathrm{sinc}(\theta f)$ ne doit apporter aucune distorsion sur le support en fréquence de x(t), c'est à dire

$$\alpha<\frac{1}{3\theta}$$