Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION AU SIGNAL DETERMINISTE

Exercices
Corrections
Chapitre 1

Yves DELIGNON

1. INTRODUCTION

Exercice 1

Classez les signaux suivants (énergie, support temporel)

1 Arect(t/T)

signal à temps continu, transitoire d'amplitude A et de support temporel [-T/2,T/2] donc à énergie finie

2 $A\sin 2\pi tf$

Signal à temps continu, périodique d'amplitude A de période 1/f donc à puissance moyenne finie

3 ramp(t)

Signal à temps continu

Energie et puissance moyenne infinie

4 $\exp -|t|$ t entier relatif

signal à temps discret et énergie finie car $E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2|k|} = \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k}$

$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-2}\right)^k$ série géométrique de raison e^{-2}, $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k} = \dfrac{1}{1-e^{-2}}$

$\sum_{k=-1}^{-\infty} e^{2k} = \sum_{k'=1}^{+\infty} e^{-2k'} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-2}\right)^{k'} - 1 = \dfrac{1}{1-e^{-2}} - 1$

soit $E_x = \dfrac{2}{1-e^{-2}} - 1 < +\infty$, x(t) est donc un signal à énergie finie.

5 $e^{-at}\,1\!\!1_{[0,+\infty[}(t)$ a > 0

signal à temps continu et énergie finie car $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2at} dt = \dfrac{1}{2a}$

6 $trian(t) * \sum_{k \in Z} \delta(t-kT)$

$trian(t) * \sum_{k \in Z} \delta(t-kT) = \sum_{k \in Z} trian(t-kT)$ signal à temps continu, c'est la périodisation du signal triangle à la période T.

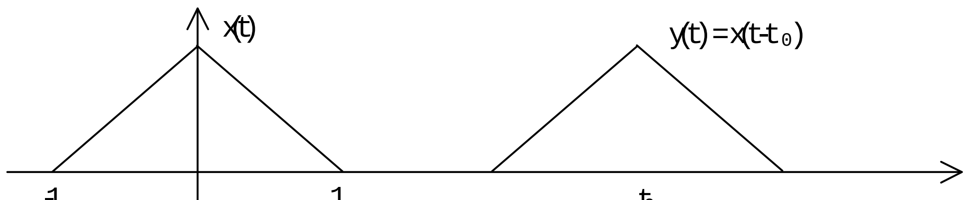
7. trian(k/N), k entier relatif

Signal à temps discret borné en temps et en amplitude donc à énergie finie.

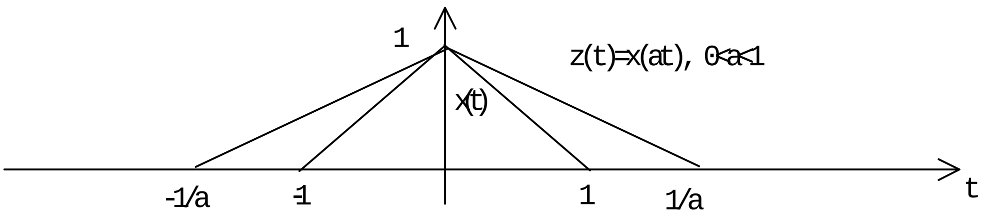
Exercice 2

Soit x(t) = trian(t).

1 Soit y(t) le signal x(t) retardé de t_0. Exprimer y(t) en fonction de x(t) et représentez le graphiquement.



2 Soit z(t) le signal x(t) dilaté. Exprimez z(t) en fonction de x(t) et représentez le graphiquement.



Exercice 3

Soit $x(t)=\varepsilon\ \mathrm{ramp}(t).\Pi_{[0,T]}(t)$

a - x est-il un signal à énergie finie, puissance moyenne finie, autre ?

$E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_0^T\varepsilon^2t^2\,dt=\frac{\varepsilon^2T^3}{3}$ donc x(t) signal à energie finie

b - Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt$ $\quad\left(x(t)*\delta(t-t_0)\right)$ $\quad x(t)*\delta\left(\frac{t-t_0}{\alpha}\right)$ $\quad\alpha\in IR+$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-t_0)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t_0)\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$$

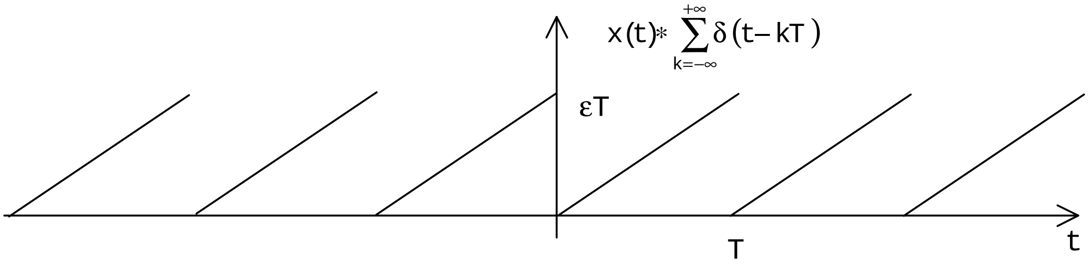
$$x(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)\delta(t-t_0-u)du=x(t-t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0-u)du=x(t-t_0)$$

$$x(t)*\delta\left(\frac{t-t_0}{\alpha}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)\delta\left(\frac{t-t_0-u}{\alpha}\right)du=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}x(\alpha v)\delta\left(\frac{t-t_0}{\alpha}-v\right)dv=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-t_0)\delta\left(\frac{t-t_0}{\alpha}-v\right)dv=\alpha x(t-t_0)$$

par changement de variable $v=u/\alpha$

c - Calculer et tracer $x(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

$$x(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(t-kT)$$



Exercice 4

Soient x, y et z trois signaux.

1. Montrer les propriétés suivantes :

$(x*y)(t)=(y*x)(t)$ commutativité de la convolution

$$(x*y)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)y(t-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-v)y(v)dv=(y*x)(t)$$ par changement de variable v=t-u

x∗(y+z))(t)= (x∗y)(t)+ (x∗z)(t) distributivité
Porpriété immédiate en tenant compte de la linéarité de l'intégrale

2 Calculer (x∗δ)(t). Commenter le résultat.

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)\delta(t-u)du=x(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-u)du=x(t)$$

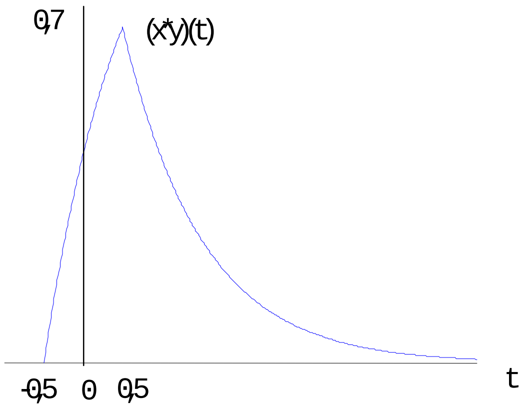
3. Soit x(t)=rect(t) et y(t)=$e^{-t}1I_{IR+}(t)$. Calculer (x∗y)(t)

$$(x*y)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)y(t-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}rect(u)e^{-(t-u)}1I_{IR+}(t-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t-u)}1I_{]-\infty,t]\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(u)du$$

si t < -1/2 $(x*y)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}0du=0$

si -½ ≤ t < ½ $(x*y)(t)=e^{-t}\int_{-\frac{1}{2}}^{t}e^{u}du=e^{-t}\left(e^{t}-e^{-1/2}\right)=1-e^{-t-1/2}$

si ½ ≤t $(x*y)(t)=e^{-t}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{u}du=e^{-t}\left(e^{1/2}-e^{-1/2}\right)$

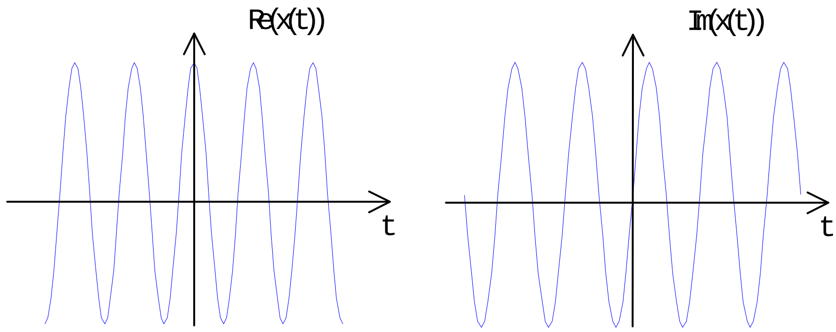


Exercice 5

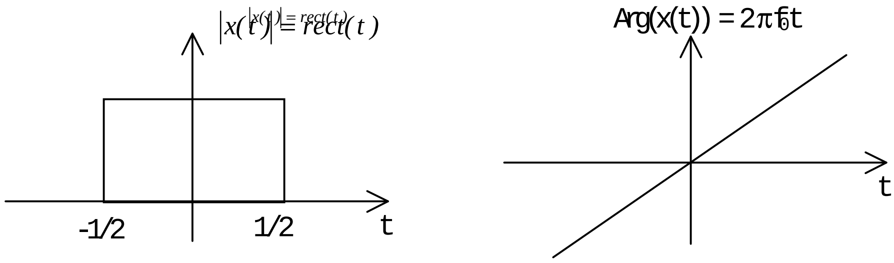
Soit x(t)=rect(t)$e^{j2\pi f_0 t}$, f_0 >>1

1. Représenter graphiquement la partie réelle et la partie imaginaire de x(t)
2. Représenter graphiquement le module et l'argument de x(t)
3 Soit y(t)=x(t)∗δ(t-5) . Représenter graphiquement x(t) et y(t).

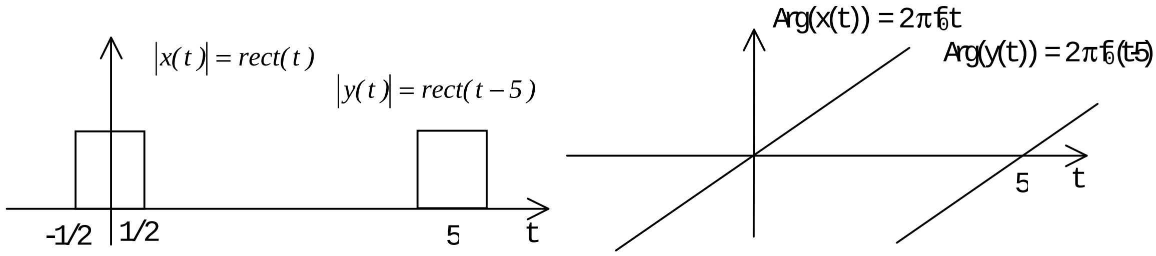
1



2.



3 .$y(t) = x(t-5)$. $y(t)$ est la réplique de $x(t)$ retardée de 5.



Exercice 6

Soit $x(t) = e^{2j\pi f t}$ $\quad f \in \mathbb{R}$

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt$ puis $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t_0+t)dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(0)\delta(t)\,dt = x(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t_0+t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t_0)\delta(t_0+t)\,dt = x(-t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t_0+t)\,dt = x(-t_0)$$

En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)}{2}x(t)dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)}{2}x(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)x(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+t_0)x(t)\,dt\right) = \frac{x(t_0)+x(-t_0)}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)}{2}x(t)\,dt = \frac{e^{2j\pi f_0 t}+e^{-2j\pi f_0 t}}{2} = \cos 2\pi f_0 t$$

Exercice 7

Soient $x_1(t) = \exp(2j\pi f_0 t)$, $x_2(t) = rect(t)$, $f_0 >> 1$.

1 $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont t'ils des signaux à energie finie ou à puissance moyenne finie ? Justifiez votre réponse.
Puisque $x_1(t)$ est périodique de période 1/f0 et d'amplitude finie, $x_1(t)$ est un signal à puissance mpoyenne finie.
$x_2(t)$ étant un signal à support temporel borné et d'amplitude bornée, $x_2(t)$ est transitoire et d'énergie finie

2 Soient $y_1(t) = x_1(t)+x_2(t)$ et $y_2(t) = x_1(t).x_2(t)$
$y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont t'ils des signaux à energie finie ou à puissance moyenne finie ? Justifiez votre réponse

$$E_{y_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |y_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t) + x_2(t)|^2 dt = \int_{-1/2}^{+1/2} |x_1(t) + x_2(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{-1/2} |x_2(t)|^2 dt + \int_{1/2}^{+\infty} |x_2(t)|^2 dt$$

Puisque $\int_{-\infty}^{-1/2} |x_2(t)|^2 dt$ et $\int_{1/2}^{+\infty} |x_2(t)|^2 dt$ tendent vers l'infini, l'énergie de y_1 est infinie

$$P_{y_1} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |y_1(t)|^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x_1(t) + x_2(t)|^2 dt$$

$$P_{y_1} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-1/2} |x_2(t)|^2 dt + \frac{1}{T} \int_{1/2}^{T/2} |x_2(t)|^2 dt + \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} |x_1(t) + x_2(t)|^2 dt$$

$$P_{y_1} = \lim_{T \to +\infty} \frac{T-1}{2T} + \lim_{T \to +\infty} \frac{T-1}{2T} + 0 = 1$$

y_1 est donc un signal à puissance moyenne finie

Comme produit d'une fonction à support temporel borné et d'une fonction périodique, $y_2(t)$ a un support temporel borné. L'amplitude de $y_2(t)$ sur [-1/2,1/2] est égale à 1, $y_2(t)$ est donc un signal à énergie finie.