Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

# INTRODUCTION AU SIGNAL DETERMINISTE

## Exercices
## Corrections
## Chapitre 2

Yves DELIGNON

# 2. REPRESENTATION VECTORIELLE DES SIGNAUX

Exercice 1

Considérons les quatre signaux de durée T représentés sur la fig. 1.

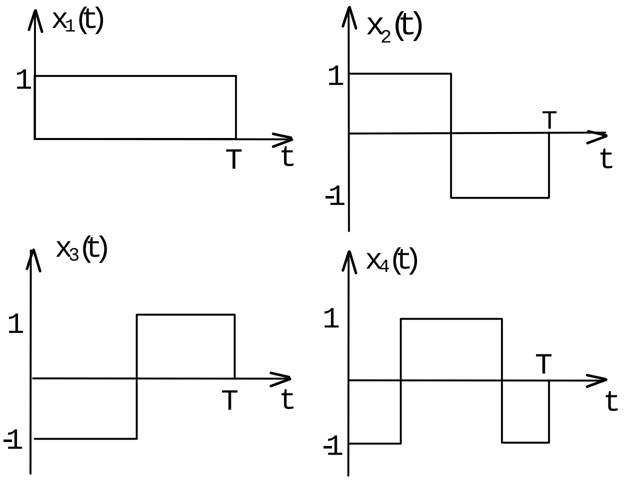



fig. 1.

1.-. Calculer la distance entre les signaux $x_1(t), x_2(t) x_3(t)$ et $x_4(t)$

$$d(x_1,x_2) = \sqrt{\int_0^T \left|x_1(t) - x_2(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_{T/2}^{T} 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

$$d(x_1,x_3) = \sqrt{\int_0^T \left|x_1(t) - x_3(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{T/2} 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

$$d(x_1,x_4) = \sqrt{\int_0^T \left|x_1(t) - x_4(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{T/4} 2^2\, dt + \int_{3T/4}^{T} 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

$$d(x_2,x_3) = \sqrt{\int_0^T \left|x_2(t) - x_3(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{T/2} 2^2\, dt + \int_{T/2}^{T} 2^2\, dt} = 2\sqrt{T}$$

$$d(x_2,x_4) = \sqrt{\int_0^T \left|x_2(t) - x_4(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{T/4} 2^2\, dt + \int_{T/2}^{3T/4} 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

$$d(x_3,x_4) = \sqrt{\int_0^T \left|x_3(t) - x_4(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\int_{T/4}^{T/2} 2^2\, dt + \int_{3T/4}^{T} 2^2\, dt} = \sqrt{2T}$$

2.-. Les signaux $x_1(t), x_2(t) x_3(t)$ et $x_4(t)$ sont-ils orthogonaux deux à deux ?

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_0^T x_1(t) x_2(t) dt = \int_0^{T/2} 1dt - \int_{T/2}^{T} 1dt = 0$$

$$\langle x_1, x_3 \rangle = \int_0^T x_1(t) x_3(t) dt = -\int_0^{T/2} 1dt + \int_{T/2}^{T} 1dt = 0$$

$$\langle x_1, x_4 \rangle = \int_0^T x_1(t) x_4(t) dt = -\int_0^{T/4} 1dt + \int_{T/4}^{3T/4} 1dt - \int_{3T/4}^{T} 1dt = 0$$

$$\langle x_2, x_3 \rangle = \int_0^T x_2(t) x_3(t) dt = -\int_0^{T/2} 1dt - \int_{T/2}^{T} 1dt = -T$$

$$\langle x_2, x_4 \rangle = \int_0^T x_2(t) x_4(t) dt = -\int_0^{T/4} 1dt + \int_{T/4}^{T/2} 1dt - \int_{T/2}^{3T/4} 1dt + \int_{3T/4}^{T} 1dt = 0$$

$$\langle x_3, x_4 \rangle = \int_0^T x_3(t) x_4(t) dt = \int_0^{T/4} 1dt - \int_{T/4}^{T/2} 1dt + \int_{T/2}^{3T/4} 1dt - \int_{3T/4}^{T} 1dt = 0$$

3.-. Commenter les résultats des questions 1 et 2.
Les signaux $x_2$,$x_3$ et $x_4$ sont orthogonaux à $x_1$,
$x_2$ et $x_3$ sont orthogonaux à $x_4$,
$x_2$ et $x_3$ sont en opposition de phase.
Les signaux les plus distants sont ceux qui sont en opposition de phase.

Exercice 2
Etudier l'orthogonalité et l'orthonormalité des fonctions suivantes :
1-. $\Psi_k(t) = \sin 2.k.\pi.t$ k entier
la période est ici T=1

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \int_0^1 \sin 2.k\pi.t \sin 2.l\pi.tdt = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos 2.(k-l)\pi.t - \cos 2.(k+l)\pi.tdt$$

$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \frac{1}{2}(\operatorname{sinc}2.(k-l) - \operatorname{sinc}2.(k+l)) = 0$ si $k \neq l$ $\quad \langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \frac{1}{2}$ si $k = l$

Les $\Psi_k(t) = \sin 2.k.\pi.t$ sont orthogonaux deux à deux pour $k \in \mathbb{N}$ et de norme $\|\Psi_k(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2-. $\Psi_k(t) = e^{j.2.k.\pi.\frac{t}{T}}$ k entier relatif
Le période est T

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{2j.k.\pi.\frac{t}{T}} e^{-2j.l.\pi.\frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{2j.(k-l)\pi.\frac{t}{T}} dt$$

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = \frac{e^{j.(k-l)\pi.} - e^{-j.(k-l)\pi}}{2j(k-l)\pi.} = \frac{\sin(k-l)\pi}{(k-l)\pi.} = \operatorname{sinc}(k-l)$$

$\langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = 0$ si $k \neq l$ $\quad \langle \Psi_k(t), \Psi_l(t) \rangle = 1$ si $k=l$

Les { $\Psi_k(t) = e^{j.2.k.\pi.\frac{t}{T}}$ , k entier relatif} sont orthogonaux deux à deux pour $k \in \mathbb{N}$ et de norme unité.

Exercice 3
Soit $x(t) = A\ \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)$ et $y(t) = \sum_{k \in Z} x(t+kT)$

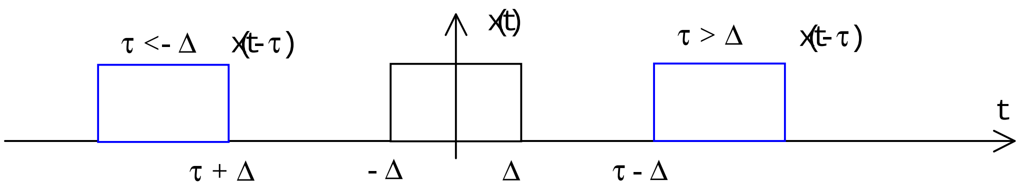
a - Calculer l'autocorrélation $C_x(\tau)$. Représenter graphiquement $x(t)$ et $C_x(\tau)$

$$C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \operatorname{rect}(\frac{t}{\Delta})\operatorname{rect}(\frac{t-\tau}{\Delta})dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right]}(t) 1I_{\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right]}(t-\tau)dt$$

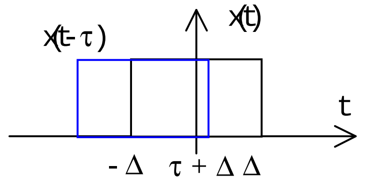
$$C_x(\tau) = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right] \cap \left[-\frac{\Delta}{2}+\tau,\frac{\Delta}{2}+\tau\right]}(t)dt$$

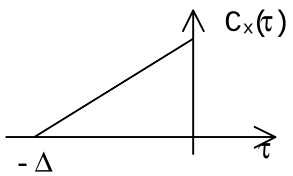
Posons $I = \left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right] \cap \left[-\frac{\Delta}{2}+\tau,\frac{\Delta}{2}+\tau\right]$

Si $\frac{\Delta}{2}+\tau < -\frac{\Delta}{2}$ ou $-\frac{\Delta}{2}+\tau > \frac{\Delta}{2}$ soit $\tau > \Delta$ ou $\tau < -\Delta$, I=∅ $C_x(\tau) = 0$

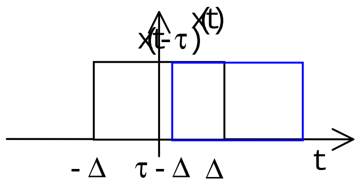


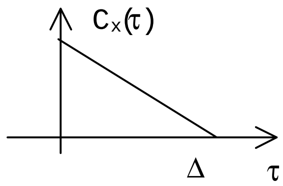
Si $-\frac{\Delta}{2}\le \frac{\Delta}{2}+\tau<\frac{\Delta}{2}$ soit $\tau\in[-\Delta,0[$, $I=\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}+\tau\right]$ et $C_x(\tau)=A^2\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}+\tau}dt=A^2(\Delta+\tau)$



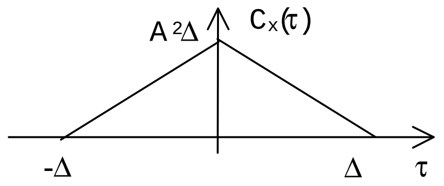




Si $-\frac{\Delta}{2}\le -\frac{\Delta}{2}+\tau<\frac{\Delta}{2}$ soit $\tau\in[0,\Delta[$, $I=\left[-\frac{\Delta}{2}+\tau,\frac{\Delta}{2}\right]$ et $C_x(\tau)=A^2\int_{-\frac{\Delta}{2}+\tau}^{\frac{\Delta}{2}}dt=A^2(\Delta-\tau)$




Soit $C_x(\tau)=A^2\Delta\left(1-\left|\frac{\tau}{\Delta}\right|\right)=A^2\Delta trian\left(\frac{\tau}{\Delta}\right)$




b - Calculer l'autocorrélation de y(t). Représenter graphiquement x(t) et $C_y(\tau)$ pour $0<\Delta<T/2$ puis $T/2<\Delta<T$.

$$C_y(\tau)=\langle y(t),y(t-\tau)\rangle=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}y(t)y(t-\tau)dt$$

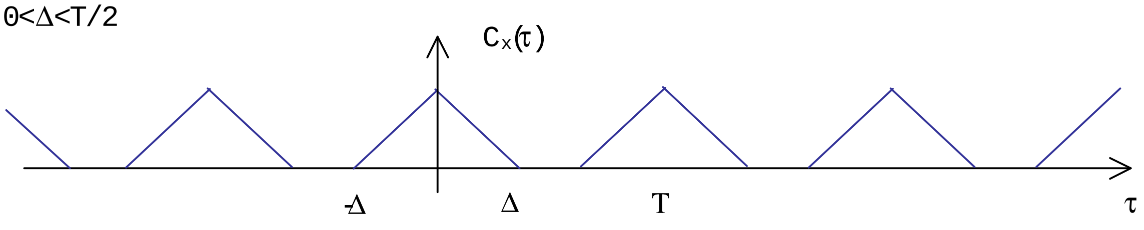
$$C_y(\tau)=\langle y(t),y(t-\tau)\rangle=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]}(t)y(t)y(t-\tau)dt$$

or $1I_{[-T/2,T/2]}(t)y(t)=x(t)$ donc $C_y(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t-\tau)dt$

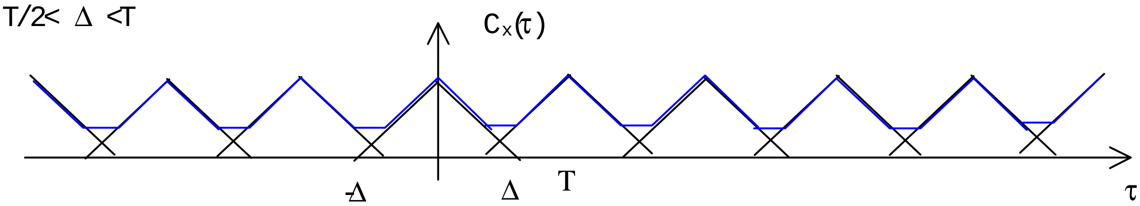
et $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(t-kT)$ donc $C_y(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(t-\tau-kT)dt=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)x(t-\tau-kT)dt$

soit $C_y(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_x(\tau+kT)$

$0<\Delta<T/2$



T/2< Δ <T




c - A partir des résultats précédents, calculer l'énergie de x et la puissance moyenne de y.

$E_x = C_x(0) = A^2\Delta$ $\qquad P_y = C_y(0) = A^2\Delta/T$

Exercice 4 QROC 96

Soit un émetteur-récepteur dont le signal émis a pour expression :

$x(t) = a e^{-at}\, 1I_{[0,+\infty[}(t)$ avec a réel positif.

1- Montrer que x(t) est un signal à énergie finie.

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} a^2 e^{-2at} dt = \frac{a}{2}$ fini, donc x(t) signal à énergie finie

2- Après émission, ce signal est réfléchi par une cible distante de d de l'émetteur- récepteur.

A la réception, le signal a pour expression $y(t) = e^{-a(t-5)}\, 1I_{[0,+\infty[}(t-5)$ .

Calculer l'intercorrélation $C_{yx}(\tau) = <y(t), x(t-\tau)>$ entre les signaux y et x.

Tracer $C_{yx}(\tau)$ et commenter.

Remarquons que y(t) = x(t-5)/a, on a alors

$$C_{yx}(t) = < y(t), x(t-\tau) > = < \frac{1}{a} x(t-5), x(t-\tau) > = \frac{1}{a} C_x(\tau - 5)$$

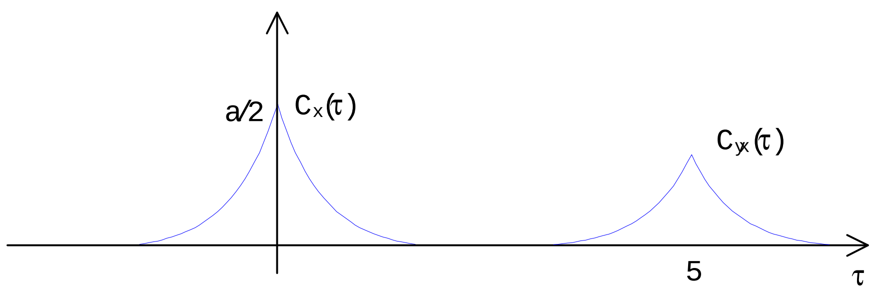
Calcul de $C_x(\tau)$

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)} 1I_{[0,+\infty[}(t) 1I_{[\tau,+\infty[}(t)dt = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)} 1I_{[0,+\infty[\cap[\tau,+\infty[}(t)dt$$

Si τ est négatif $C_x(\tau) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)} 1I_{[0,+\infty[}(t)dt = a^2 e^{a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{a}{2} e^{a\tau}$

Si τ positif $C_x(\tau) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)} 1I_{[\tau,+\infty[}(t)dt = a^2 e^{a\tau} \int_\tau^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{a}{2} e^{-a\tau}$

soit $C_x(\tau) = \frac{a}{2} e^{-a|\tau|}$ et $C_{yx}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-a|\tau-5|}$




L'intercorrélation du signal émis avec le signal reçu permet de détecter le signal émis et d'estimer le retard de propagation qui correspond au maximum de l'intercorrélation.

3- Sachant que le signal se propage à la vitesse de $300 m.s^{-1}$, calculer la distance entre la cible et le système d'émission réception.

Puisque $C_x$ est maximal en 0, $C_{yx}$ est maximal en $\tau=5$ s ce qui est aussi le retard de propagation aller et retour de l'onde émise. La distance séparant la cible de l'émetteur récepteur est donc de 300*5/2=750 m

Exercice 5 QROC 97

Un signal x(t) est émis vers un récepteur à travers un canal de transmission. Le signal reçu par le récepteur est $y(t)=ax(t-t_0)+bx(t-t_1)$ avec $0 < b \ll a$ et $t_1 > t_0 > 0$, $t_0$ le retard dû au canal et $x(t-t_1)$ un écho du signal x(t) émis.

1. Le canal est modélisé par un filtre linéaire et invariant dans le temps. Déterminer la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert de ce canal.

$y(t)=ax(t-t_0)+bx(t-t_1)=(a\delta(t-t_0)+b\delta(t-t_1))*x(t)$.
On a donc comme réponse impulsionnelle $h(t)=a\delta(t-t_0)+b\delta(t-t_1)$
et fonction de transfert $H(f) = TF[h(t)]=ae^{-2j\pi ft_0}+ae^{-2j\pi ft_1}$

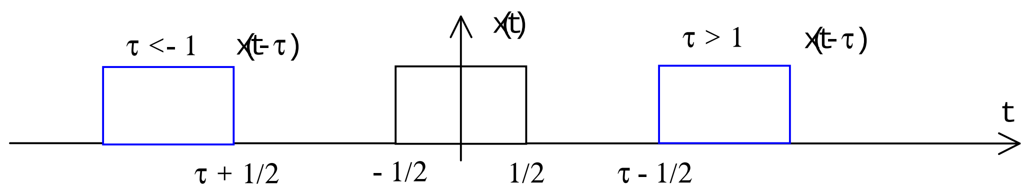
2. Supposons que le signal x(t) soit une impulsion rectangulaire, $x(t)=rect(t)$
   a. Calculer l'autocorrélation de x(t). Représenter graphiquement $C_x(\tau)$

$$C_x(\tau)=\langle x(t),x(t-\tau)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} rect(t)rect(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(t)1I_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(t-\tau)dt$$

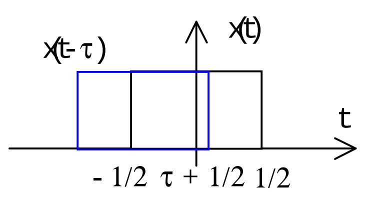
$$C_x(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cap\left[-\frac{1}{2}+\tau,\frac{1}{2}+\tau\right]}(t)dt$$

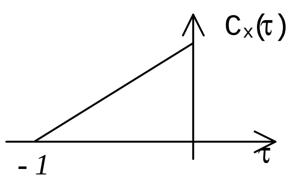
Posons $I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cap\left[-\frac{1}{2}+\tau,\frac{1}{2}+\tau\right]$

Si $\frac{1}{2}+\tau<-\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}+\tau>\frac{1}{2}$ soit $\tau > 1$ ou $\tau <- 1$, $I=\emptyset$ $C_x(\tau) = 0$

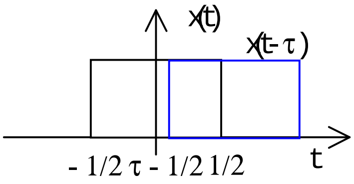


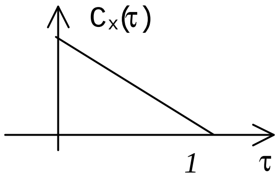

Si $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}+\tau<\frac{1}{2}$ soit $\tau\in[-1,0[$, $I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\tau\right]$ et $C_x(\tau)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\tau}dt=(1+\tau)$



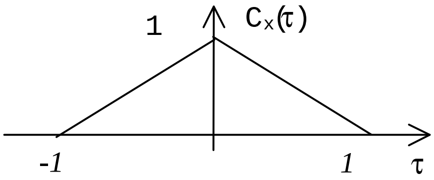




Si $-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{2}+\tau<\frac{1}{2}$ soit $\tau\in[0,1[$, $I=\left[-\frac{1}{2}+\tau,\frac{1}{2}\right]$ et $C_x(\tau)=\int_{-\frac{1}{2}+\tau}^{\frac{1}{2}}dt=1-\tau$



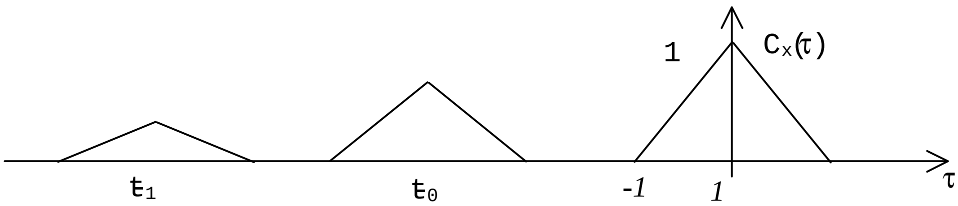




Soit $C_x(\tau)=1-|\tau|=trian(\tau)$




b. En déduire l'intercorrélation entre x et y, $C_{xy}(\tau)=\langle x(t), y(t-\tau)\rangle$.
Représenter graphiquement $C_{xy}(\tau)$.

$C_{xy}(\tau)=\langle x(t), y(t-\tau)\rangle = \langle x(t), ax(t-\tau-t_0)+bx(t-\tau-t_1)\rangle = a\langle x(t), x(t-\tau-t_0)\rangle+b\langle x(t),x(t-\tau-t_1)\rangle$
$C_{xy}(\tau) = aC_{xy}(\tau+t_0) + bC_{xy}(\tau+t_1)$




c. Que proposez-vous pour estimer le retard du canal ?

Filtrer le signal reçu par un filtre de réponse impulsionnelle x(-t), ce qui revient à faire une intercorrélation du signal en sortie de canal par le signal en entrée du canal, puis détecter les pics d'intercorrélation. Ces pics correspondent en effet aux retards $t_0$ et $t_1$ des trajets multiples du canal.

Exercice 6 (Simon Haykin)
Considérons un ensemble de n fonctions réelles $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, …, $\phi_n(t)$ orthonormales sur [0,T] :

$$\int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt = \delta_K(i-j) = 1 \text{ si } i=j \text{ et } 0 \text{ autrement}$$

Soit g(t) une fonction quelconque que l'on cherche à approcher sur l'intervalle [0,T] par une combinaison linéaire des fonctions $(\phi_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$.
On définit l'erreur moyenne quadratique de l'approximation par :

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\int_0^T \left[ g(t) - \sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k(t) \right]^2 dt$$

1. Le critère d'approximation est la minimisation de l'erreur quadratique moyenne $\varepsilon$. Montrer que les coefficients $g_k$ de la combinaison linéaire vérifient :

$$g_k = \int_0^T g(t)\phi_k(t)dt \quad k=1, 2, \dots, n$$

D'après le principe d'orthogonalisation, la fonction approchant au mieux g(t) au sens de l'erreur moyenne quadratique minimale est telle que l'erreur d'approximation est orthogonale aux signaux la composant, c'est à dire :

$$\left\langle g(t)-\sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k(t), \phi_j(t)\right\rangle = 0$$

On a donc $\left\langle g(t),\phi_j(t)\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} g_k \left\langle \phi_k(t),\phi_j(t)\right\rangle$

Puisque $(\phi_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ est une base orthonormale, $\left\langle \phi_k,\phi_j\right\rangle = 0 \ \forall k \neq j$ et $\left\langle \phi_k,\phi_k\right\rangle = 1$

et $\left\langle g(t),\phi_j(t)\right\rangle = g_j$ soit $g_j = \int_0^T g(t)\phi_j(t)dt$ j=1, 2, …, n

2 Calculer la valeur minimale de l'erreur quadratique moyenne $\varepsilon$. Que se passe t'il si le nombre de termes n tend vers l'infini.

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\int_0^T \left[ g(t) - \sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k(t)\right]^2 dt$$

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\left\langle g(t)-\sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k, g(t)-\sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k\right\rangle = \frac{1}{T}\left(\left\langle g(t),g(t)\right\rangle - \left\langle g(t),\sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k\right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k, g(t)\right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k, \sum_{k=1}^{n} g_k\phi_k\right\rangle\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\left(\left\langle g(t),g(t)\right\rangle - 2\sum_{k=1}^{n} g_k\left\langle \phi_k(t),g(t)\right\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{k'=1}^{n} g_{k'}g_k\left\langle \phi_k(t),\phi_{k'}(t)\right\rangle\right)$$

or $\left\langle \phi_k(t),\phi_{k'}(t)\right\rangle = 0$ si $\forall k \neq k'$ et $\left\langle \phi_k(t),\phi_{k'}(t)\right\rangle = 1$ si k=k'

et $\left\langle g(t),\phi_k(t)\right\rangle = g_k$

On a donc $\varepsilon = \frac{1}{T}\left(\|g(t)\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} g_k^2 + \sum_{k=1}^{n} g_k^2\right) = \frac{1}{T}\left(\|g(t)\|^2 - \sum_{k=1}^{n} g_k^2\right)$

Lorque n tend vers l'infini, l'espace engendré par les $\phi_k$ coïncide avec l'espace des siganux réels à énergie finie. L'approximation dévient alors une décomposition d'une signal dans la base des $\phi_k$ et l'erreur tend vers zéro.

Exercice 7 QROC TTV98

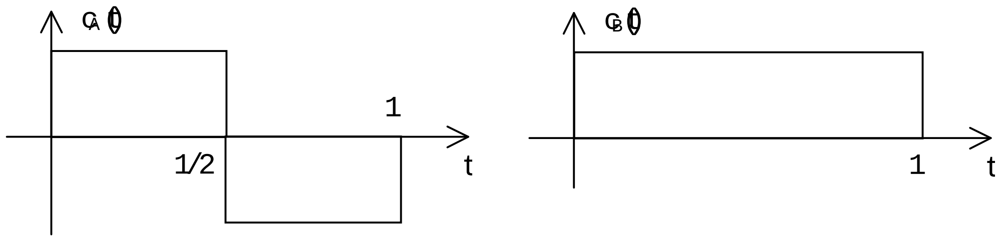
Soient A et B deux émetteurs et C un récepteur.

Pour A, le signal associé au symbole $a\in\{-1,1\}$ s'écrit $x_A(t)=a.c_A(t)$ avec

$$c_A(t)=\left(\mathrm{rect}\left(\frac{t-1/4}{1/2}\right)-\mathrm{rect}\left(\frac{t-3/4}{1/2}\right)\right)$$

Pour B, le signal associé au symbole $b\in\{-1,1\}$ s'écrit $x_B(t)=b.c_B(t)$ avec $c_B(t)=\mathrm{rect}(t-1/2)$

1 a. Représentez graphiquement $x_A(t)$ et $x_B(t)$.




b. $x_A(t)$ et $x_B(t)$ sont-ils des signaux à énergie finie, à puissance moyenne finie ?

$x_A$ et $x_B$ sont des signaux à énergie finie car ils sont bornés en temps et en amplitude, c'est à dire transitoire

2. Un récepteur C reçoit le signal $x(t) = x_A(t)+x_B(t)$ (le retard dû à la transmission est supposé négligeable).

a. Calculez le produit scalaire entre $x(t)$ et $c_A(t)$ et celui entre $x(t)$ et $c_B(t)$.

$$<x(t), c_A(t)> = <x_A(t)+x_B(t), c_A(t)> = <x_A(t), c_A(t)> + <x_B(t), c_A(t)>$$
$$= a <c_A(t), c_A(t)> + b <c_B(t), c_A(t)>$$

or $< c_A(t), c_A(t) > = \int_{-\infty}^{+\infty} c_A^2(t)dt = \int_0^1 1dt = 1$ et $< c_B(t), c_A(t) > = \int_{-\infty}^{+\infty} c_A(t)c_B(t)dt = \int_0^{1/2} 1dt - \int_0^{1/2} 1dt = 0$

$c_A$ et $c_B$ sont orthogonaux et de norme 1.

On obtient $<x(t), c_A(t)> = a$

de même, on a $<x(t), c_B(t)> = b$

b. Que proposez-vous pour retrouver à la réception les symboles a et b à partir de $x(t)$, $c_A(t)$ et $c_B(t)$.
Pour retrouver les symboles émis par A ( et B), il suffit de corréler le signal reçu par le code $c_A(t)$ affecter à A ( respectivement $c_B(t)$ affecter à B) puisque les signaux sont codés par des codes normés et orthogonaux. C'est le principe de l'accès multiple à répartition par code utilisé notamment sur les systèmes de communications avec les mobiles de troisième génération (UMTS, CDMA2000).