Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION AU SIGNAL DETERMINISTE

Exercices
Corrections
Chapitre 3

Yves DELIGNON

3. SERIE DE FOURIER ET TRANSFORMEE DE FOURIER

Exercice 1

Développer en série de Fourier la fonction représentée dans la fig. 1.

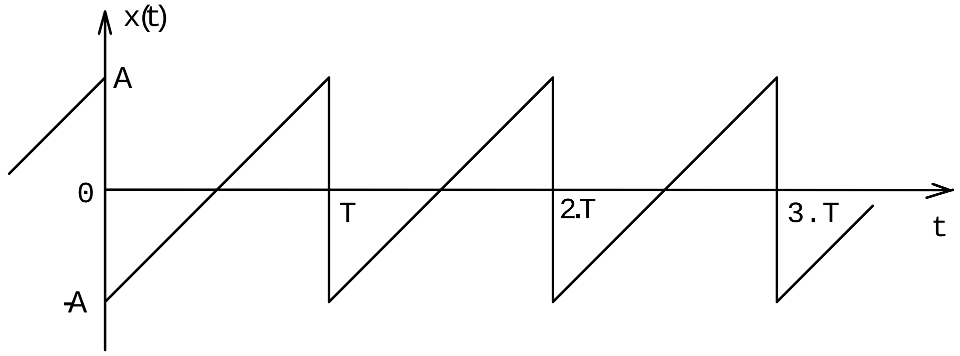


fig.1.

$$x(t)=\frac{2A}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-kT\right)$$

x(t) est périodique de période T. Son développement en série de Fourier s'écrit :

$$x(t)=\sum_{k=\infty}^{+\infty}X_k e^{2j\pi\frac{kt}{T}} \quad \text{avec} \quad X_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt$$

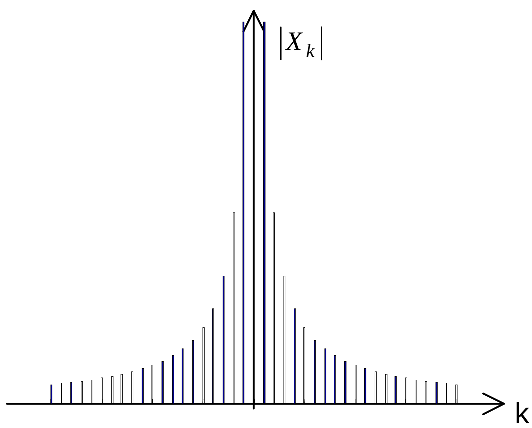
$$X_k=\frac{2A}{T^2}\int_0^T\left(t-\frac{T}{2}\right)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt=\frac{2A}{T^2}e^{-j\pi k}\int_0^T ue^{-2j\pi\frac{ku}{T}}du$$ après changement de variable u = t-T/2

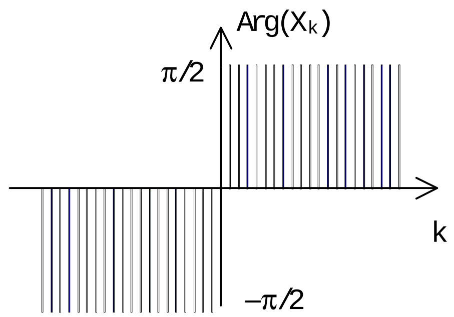
Intégration par parties. Posons f(u) = u et $g'(u)=e^{-j\frac{2\pi}{T}ku}$ on a f'(u) = 1 et $g'(u)=T\frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}ku}}{-j2\pi k}$

soit

$$X_k=\frac{2A}{T^2}e^{-j\pi k}\left(\left[\frac{T}{-2j\pi k}e^{-2j\pi\frac{ku}{T}}u\right]_0^T+\frac{T}{2j\pi k}\int_0^T e^{-2j\pi\frac{ku}{T}}du\right)$$ soit $X_k=-\frac{A}{j\pi k}$ si $k\neq 0$ et $X_0=0$

On a finalement $x(t)=\frac{jA}{\pi}\sum_{\substack{k=\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{k}e^{2j\pi\frac{kt}{T}}$





Exercice 2

1.-. Développer en série de Fourier la fonction $f(t)=\sum_{k=\infty}^{+\infty} 1\!\!\mathrm{I}_{\left[kT,kT+\frac{T}{2}\right[}(t)$.

f(t) étant un signal périodique de période T, décomposer f(t) en série de Fourier revient à calculer

$$f(t)=\sum_{k=\infty}^{+\infty} X_k e^{2j\pi\frac{kt}{T}} \quad \text{avec} \quad X_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt$$

$$X_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}t}dt=\frac{1}{T}\int_0^{T/2} e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt$$

$$=\frac{1}{T}\frac{e^{-j\pi k}-1}{-2j\pi\frac{k}{T}}=\frac{1-e^{-j\pi k}}{2j\pi k} \quad \text{si k différent de 0}$$

si k pair $X_k=0$

si k impair $X_k=\frac{1}{j\pi k}$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}dt=\frac{1}{T}\frac{T}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{pour k=0}$$

on a donc $f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{k=\infty \\ k\ impair}}^{+\infty}\frac{1}{j\pi k}e^{2j\pi\frac{kt}{T}}$

Remarquons en posant k = 2k'+1 que cette expression s'écrit aussi

$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k'=\infty}^{+\infty}\frac{1}{j\pi(2k'+1)}e^{2j\pi\frac{(2k'+1)t}{T}}$$

2.-. En déduire la somme $S=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

Relation de Parseval $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2=\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2dt=\frac{1}{2}=P_x$

soit $P_x=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k'=\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2k'+1)^2}$ or $\sum_{k'=\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2k'+1)^2}=2S$

en conséquence $S=\frac{\pi^2}{8}$

Exercice 3

1.-. Après avoir exprimé un signal périodique sous forme de série de Fourier, calculer sa transformée de Fourier.

Considérons un signal x(t) périodique de période T. x(t) se décompose en série de Fourier comme suit :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2j\pi\frac{kt}{T}} \quad \text{avec} \quad X_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt$$

La transformé de Fourier d'un signal périodique s'écrit :

$$TF[x(t)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k TF\left[e^{2j\pi\frac{kt}{T}}\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

2.-. Calculer la série de Fourier d'un signal rectangulaire

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\ 1I_{\left[-\frac{\theta}{2}+k.T,\frac{\theta}{2}+k.T\right]}(t)$$. θ<T et k entier relatif.

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{2j\pi\frac{kt}{T}} \quad \text{avec} \quad Y_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt=\frac{A}{T}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt=\frac{A\theta}{T}sinc\frac{k\theta}{T}$$

$$\text{soit} \quad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{A\theta}{T}sinc\frac{k\theta}{T}e^{2j\pi\frac{kt}{T}}$$

3.-. En déduire la transformée de Fourier de y(t).

$$TF[y(t)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k TF\left[e^{2j\pi\frac{kt}{T}}\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{A\theta}{T}sinc\frac{k\theta}{T}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

4.-. Calculer la transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire $y_T(t)= A\ 1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]}(t)$

$$y_T(t)=A.1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]}(t)=A\,rect\left(\frac{t}{\theta}\right)$$

puisque TF[rect(t)] = sinc(f) on a $Y_T(f)=A\theta\, sinc(\theta f)$

5.-. Soit $x_T(t)$ un signal défini sur la période T. A l'aide du peigne de Dirac, exprimer le signal périodique x(t) (de période T) construit à partir de $x_T(t)$.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t-kT)=x_T(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

6.-. Déduire des questions 1 et 5 une relation entre transformée de Fourier de $y_T(t)$ et coefficients de la série de Fourier de y(t).

$$Y_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-2j\pi\frac{kT}{T}t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]}(t)y(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} y_T(t)e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}dt=\frac{1}{T}Y_T\left(\frac{k}{T}\right)$$

ce résultat est vérifié puisque $Y_T(f)=A\theta\, sinc(\theta f)$ et $Y_k=\frac{A\theta}{T}sinc\frac{k\theta}{T}$

Exercice 4 QROC 95

Soit le signal x(t) défini par $x(t)=\dfrac{1}{2\Delta}\,1I_{[-\Delta,\Delta[}(t)$

1 Calculer la transformée de Fourier X(f) de x(t)

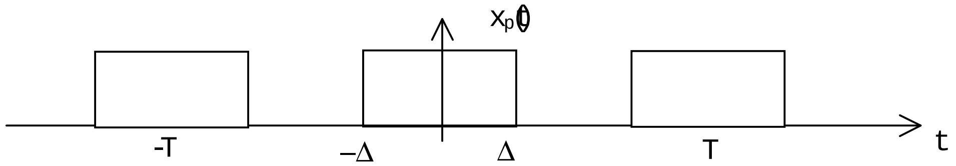
$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-2j\pi ft}dt=\frac{1}{2\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta}e^{-2j\pi ft}dt=\frac{1}{2\Delta}\left[\frac{e^{-2j\pi ft}}{-2j\pi f}\right]_{-\Delta}^{\Delta}=\frac{1}{2\Delta\pi f}\left[\frac{e^{2j\pi f\Delta}-e^{-2j\pi f\Delta}}{2j}\right]=\frac{\sin(2\pi f\Delta)}{2\Delta\pi f}$$

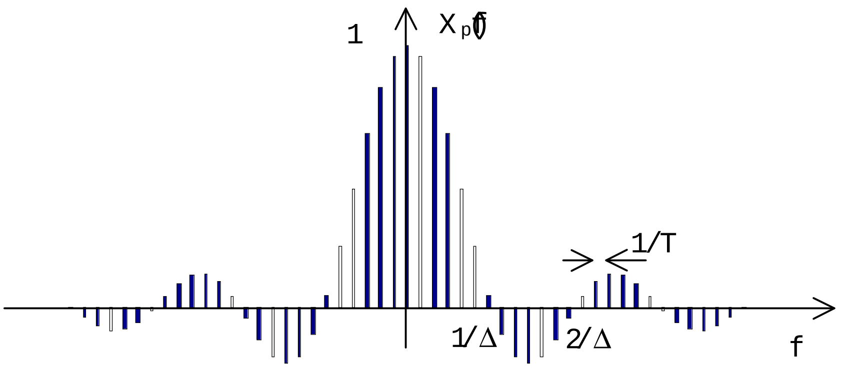
$$X(f)=\sin c(2\Delta f)$$

2. Soit $x_p(t)=x(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)$ avec $T\geq 2\Delta$.

a Calculer la transformée de Fourier $X_p(f)$ de $x_p(t)$ en fonction de celle de x(t). Tracer $x_p(t)$ et $X_p(f)$. Commenter.

$$X_p(f)=X(f)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k.}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(\frac{k.}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sin c\left(\frac{2\Delta k.}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$





La périodisation en temps d'un signal revient à discrétiser le support de son spectre.

b. Que se passe t'il lorsque $\Delta\to 0$

Les impulsions rectangulaires $x_p(t)$ tendent vers le peigne de Dirac. $x_p(t)\xrightarrow{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)$

De même, la support du lobe principal devient IR, $X_p(f)$ tend aussi vers le peigne de Dirac.

$$X_p(t)\xrightarrow{\Delta\to 0}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Exercice 5

Un signal x(t) à énergie finie, de bande spectrale limitée à [-B,B] est élevé au carré. Le signal résultant est noté y(t) ($y(t)=x^2(t)$). Montrer que y(t) est a bande spectrale limitée sur [-2B,2B].

On peut écrire $Y(f)=X(f)*X(f)$

Puisque le support de X(f) est [-B,B], celui de Y(f) est inclus dans le support de $1I_{[-B,B]}(f)*1I_{[-B,B]}(f)=trian(f/2B)$ qui est de support [-2B,2B].

y(t) est donc a bande spectrale limitée sur [-2B,2B].

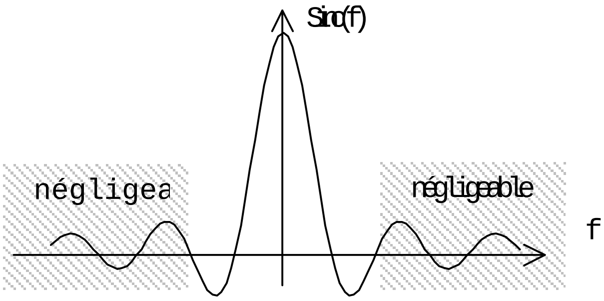
Exercice 6 QROC TTV98

Système de transmission duplex (émission de A vers B et de B vers A en même temps) sur la bande des 800kHz-1000kHz.

Soient x_A et x_B les signaux à émettre simultanément.

$y_A(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right)$ $y_B(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right)$ avec $a_k\in\{-1,1\}$ $b_k\in\{-1,1\}$ $\forall k$ entier relatif

1. En supposant négligeable TF[rect(t/T)] à partir du troisième lobe (inclus), quelle est la largeur du spectre de $y_A(t)$ et $y_B(t)$?



$$y_A(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right)=rect\left(\frac{t}{T}\right)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t-kT)$$

$$Y_A(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right)=TF\left[rect\left(\frac{t}{T}\right)\right]TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t-kT)\right]=T\,sinc(Tf)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-2j\pi fkT}$$

Le support de $Y_A(f)$ est donné par :

$$supp(Y_A(f))=supp(Sinc(Tf))\cap supp\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-2j\pi fkT}\right)$$

puisque les deux principaux lobes du sinus cardinal sont conservés uniquement, on a supp(Sinc(Tf))=[-2/T,2/T]

De plus $\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-2j\pi fkT}\right)$ est un signal périodique, de support IR.

On a finalement supp(Y_A(f))= [-2/T,2/T] $\cap$IR=[-2/T,2/T]

et la largeur du spectre de 4/T.

2. Division en fréquence.

La bande de fréquence alloué au système est 800kHz-1000kHz.

a Quelles sont les fréquences porteuses f_A et f_B pour que A émette dans la bande des 800kHz-880kHz et B émette dans la bande des 920kHz-1000kHz.

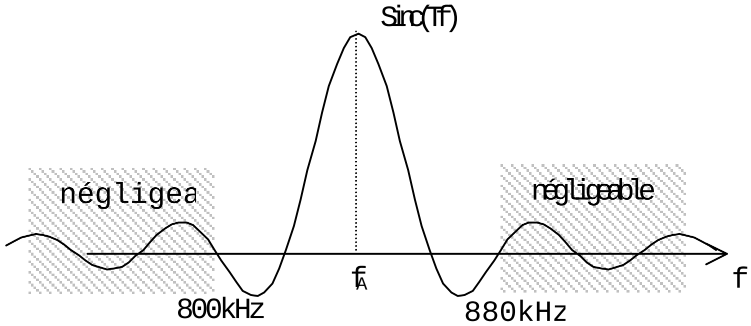
La fréquence porteuse est la fréquence centrale.

Pour A, f_A = 840kHz et pour B f_B = 960 kHz

b En tenant compte de la question 1, que vaut T maximisant le débit de A et B?

Donnez les débits binaires de A et de B.

Pour avoir un débit le plus important possible, la durée des impulsions doit être la plus petite possible et donc sa représentation en fréquence aussi large que possible.



On a donc : $\frac{4}{T} = 80.10^3$ soit T= 50µs Débit binaire = $\frac{1}{T} = 20kbits / s$

Le duplex en fréquence est notamment utilisé dans la norme de communication mobile GSM.

3. Division temporelle

Toute la bande de fréquence est utilisée pour émettre de A vers B et pour émettre de B vers A. Le temps est subdivisé en trames de 100 intervalles de temps (IT) de durée T. Les 6 premiers IT sont réservés à l'entête, les 40 suivants pour l'émission de A vers B, suivent 14 intervalles de temps de garde puis 40 IT pour l'émission de B vers A.

a. Comment émettre $y_A(t)$ et $y_B(t)$ dans la bande de fréquence 800kHz-1000kHz.
Que vaut la fréquence porteuse de A et B ?

L'idée de la division temporelle est de transmettre simultanément de A vers B puis de B vers A etc… A et B doivent donc être synchronisés, ils utilisent toutes la bande de fréquence sur l'intervalle de temps où ils émettent.
La fréquence porteuse de A est identique à celle de B. Elle vaut $f_A=f_B$ = 900kHz.

b. En tenant compte de la question 1, que vaut T pour assurer un débit de transmission maximal. Donnez le débit binaire de A et B. Comparer le à ceux obtenus en 2.b.

Cette fois $\frac{4}{T} = 200.10^3$ puisque toute la bande est disponible à l'émission.
On a alors des impulsion de durée $T = 20$ µs

Pendant la phase d'émission, le débit vaut 50kbits.s^{-1}
Puisqu'il faut partager ce débit avec l'autre sens de communication et tenir compte des temps de garde et des enêtes, on a comme débit

0,4*50=20kbits.s^{-1}, résultat identique à celui obtenu par division en fréquence.

Le duplex en temps est notamment utilisé dans la norme de communication sans fil numérique DECT (Digital Enhanced Cordless Telecommunication).

Entête	Transmission A vers B	Garde	Transmission B vers A
6 IT	40 IT	14 IT	40 IT

Exercice 8 QROC TTV00

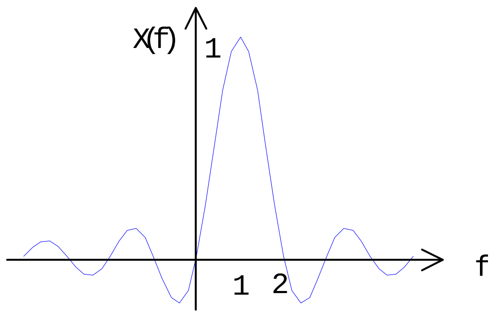
1. Soit $x(t)=e^{2j\pi t}rect(t)$

a. x(t) est-il un signal à énergie finie, à puissance moyenne finie.

x(t) est borné en temps $supp(x(t))=[-1/2,1/2]$ et en amplitude ($|x(t)|<1$, x(t) est donc un signal à énergie finie

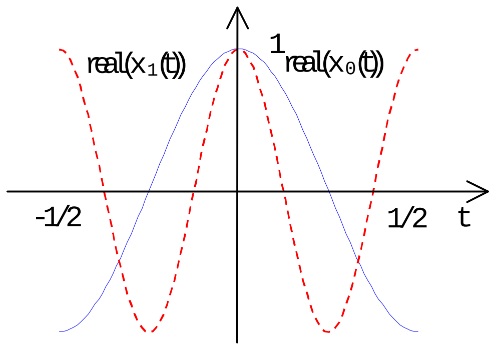
b. Calculer sa transformée de Fourier et représentez la graphiquement

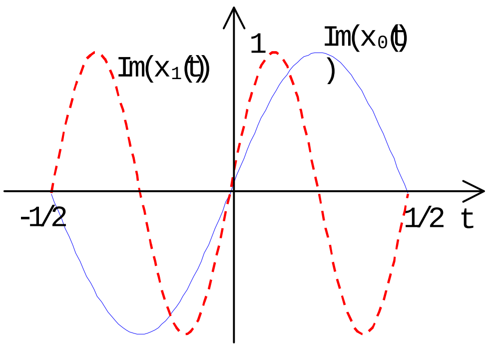
X(f)=TF[rect(t)](f-1) = sinc(f-1) propriété de la modulation de la transformée de Fourier



2. Considérons deux stations mobiles émettant les signaux $x_0(t)=a_0e^{2j\pi t}rect(t)$ et $x_1(t)=a_1e^{4j\pi t}rect(t)$ où a_0 et a_1 sont les symboles de valeur ±1.

a. Sur deux graphiques, représenter les parties réelles et les parties imaginaires de $x_0(t)$ et $x_1(t)$.





b. Calculer < $x_0(t)$, $e^{4j\pi t}$ > puis < $x_1(t)$, $e^{2j\pi t}$ > < $x_0(t)$, $e^{2j\pi t}$ > et < $x_1(t)$, $e^{4j\pi t}$ >.

$$\left\langle x_0(t),e^{4j\pi t}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x_0(t)e^{-4j\pi t}dt=a_0\int_{-1/2}^{1/2}e^{2j\pi t}e^{-4j\pi t}dt=a_0\int_{-1/2}^{1/2}e^{-2j\pi t}dt$$

$$=a_0\left[\frac{e^{-2j\pi t}}{-2j\pi}\right]_{-1/2}^{1/2}=a_0\frac{e^{j\pi}-e^{-j\pi}}{2j\pi}=0$$

$$\left\langle x_0(t),e^{2j\pi t}\right\rangle=a_0\int_{-\infty}^{+\infty}x_0(t)e^{-2j\pi t}dt=a_0\int_{-1/2}^{1/2}1dt=a_0$$

$$\left\langle x_1(t),e^{4j\pi t}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)e^{-4j\pi t}dt=a_1\int_{-1/2}^{1/2}1dt=a_1$$

$$\left\langle x_1(t),e^{2j\pi t}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)e^{-2j\pi t}dt=a_1\int_{-1/2}^{1/2}e^{4j\pi t}e^{-2j\pi t}dt=a_1\int_{-1/2}^{1/2}e^{2j\pi t}dt$$

$$= a_1 \left[\frac{e^{2j\pi t}}{2j\pi} \right]_{-1/2}^{1/2} = a_1 \frac{e^{j\pi} - e^{-j\pi}}{2j\pi} = 0$$

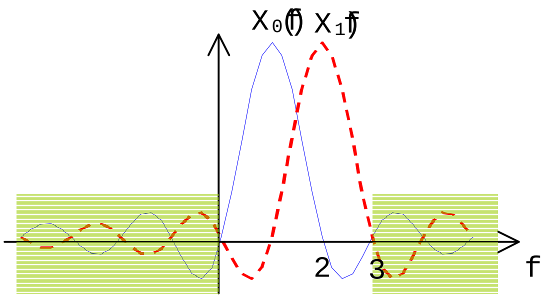
Commentaire :
$x_0(t)$ est orthogonal à $e^{4j\pi t}$ et $x_1(t)$ est orthogonal à $e^{2j\pi t}$.

c. A la station de base, on reçoit $y(t) = a_0 e^{2j\pi t} rect(t) + a_1 e^{4j\pi t} rect(t)$. En vous inspirant de la question précédente, proposez deux opérations permettant de récupérer a_0 et a_1.

Pour récupérer les symboles émis, on peut effectuer le produit scalaire de y(t) avec $e^{2j\pi t}$ et $e^{4j\pi t}$. On a en effet :

$$\langle y(t), e^{2j\pi t} \rangle = \langle x_0(t), e^{2j\pi t} \rangle + \langle x_1(t), e^{2j\pi t} \rangle = a_0 \qquad \langle y(t), e^{4j\pi t} \rangle = \langle x_0(t), e^{4j\pi t} \rangle + \langle x_1(t), e^{4j\pi t} \rangle = a_1$$

3. En considérant les lobes secondaires du sinus cardinal négligeables, quelle est la bande occupée par y(t).



La bande de fréquence est de largeur 2.

Si les symboles avaient été transmis sur des bandes de fréquences disjointes, quelle aurait été la bande de fréquence totale occupée. Concluer.

Dans ce cas la bande de fréquence est de largeur 4. Le fait d'utiliser des signaux orthogonaux permet d'économiser de la bande de fréquence.