Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION
AU
SIGNAL DETERMINISTE

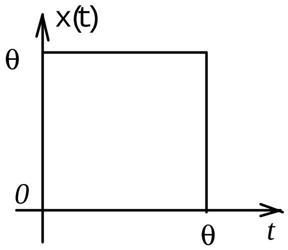
Exercices
Corrections
Chapitre 4

Yves DELIGNON

4. DENSITE SPECTRALE

Exercice 1

1.-. Calculer la fonction d'autocorrélation du signal représenté dans la figure suivante:



x(t) peut aussi s'écrire $x(t)=\theta rect\left(\frac{t-\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)$. Notons $z(t)=\theta rect\left(\frac{t}{\theta}\right)$

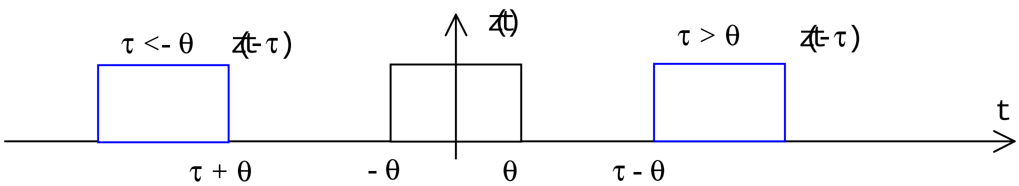
$$C_x(\tau)=\langle x(t),x(t-\tau)\rangle=\left\langle \theta rect\left(\frac{t-\frac{\theta}{2}}{\theta}\right),\theta rect\left(\frac{t-\tau-\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)\right\rangle=\left\langle z\left(t-\frac{\theta}{2}\right),z\left(t-\tau-\frac{\theta}{2}\right)\right\rangle=C_z(\tau)$$

$$C_x(\tau)=\langle z(t),z(t-\tau)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2 rect(\frac{t}{\theta})rect(\frac{t-\tau}{\theta})dt=\theta^2\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]}(t)1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]}(t-\tau)dt$$

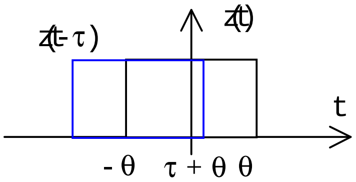
$$C_x(\tau)=\theta^2\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]\cap\left[-\frac{\theta}{2}+\tau,\frac{\theta}{2}+\tau\right]}(t)dt$$

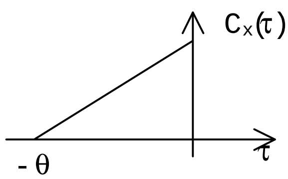
Posons $I=\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right]\cap\left[-\frac{\theta}{2}+\tau,\frac{\theta}{2}+\tau\right]$

Si $\frac{\theta}{2}+\tau<-\frac{\theta}{2}$ ou $-\frac{\theta}{2}+\tau>\frac{\theta}{2}$ soit $\tau>\theta$ ou $\tau<-\theta$, $I=\varnothing$ $C_x(\tau)=0$

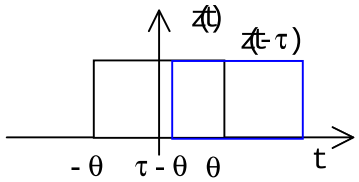


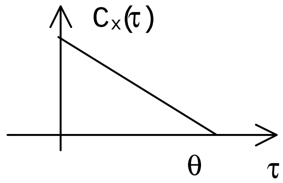
Si $-\frac{\theta}{2}\le\frac{\theta}{2}+\tau<\frac{\theta}{2}$, $I=\left[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}+\tau\right]$ et $C_x(\tau)=\theta^2\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}+\tau}dt=\theta^2(\theta+\tau)$



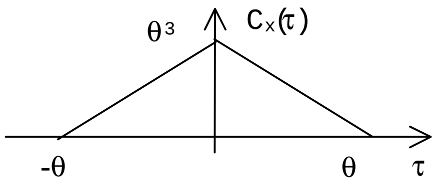


Si $-\frac{\theta}{2} \le -\frac{\theta}{2} + \tau < \frac{\theta}{2}$, $I = \left[-\frac{\theta}{2} + \tau , \frac{\theta}{2} \right]$ et $C_x(\tau) = \theta^2 \int_{-\frac{\theta}{2}+\tau}^{\frac{\theta}{2}} dt = \theta^2 (\theta - \tau)$





Soit $C_x(\tau) = \theta^3 \left(1 - \left| \frac{\tau}{\theta} \right| \right) = \theta^3 trian\left(\frac{\tau}{\theta} \right)$



2.-. Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance (DSP) d'un signal rectangulaire périodique.

$$y(t) = \sum_{k \in Z} x(t - kT)$$

$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) y(t-\tau) dt$$

$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} 1I_{\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]}(t) y(t) y(t-\tau) dt$$

or $1I_{[-T/2,T/2]}(t)y(t)=x(t)$ donc $C_y(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t-\tau) dt$

et $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$ donc $C_y(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau-kT) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t-\tau-kT) dt$

soit $C_y(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_x(\tau + kT)$ ou encore $C_y(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_x(\tau - kT)$

La corrélation d'un signal périodique est aussi périodique de même période.

Densité spectrale de puissance

$$S_y(f) = TF[C_y(\tau)] = TF\left[C_x(\tau) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \right] = S_x(f) TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \right] = S_x(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T} \right)$$

$$S_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_x(f) \delta\left(f - \frac{k}{T} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_x\left(\frac{k}{T} \right) \delta\left(f - \frac{k}{T} \right)$$

La densité spectrale de puissance d'un signal périodique a un support discret.

3.-. Calculer les fonctions de corrélation, les densité spectrale de puissance de

a-. $\cos(2.\pi f_0 t)$ b.-. $\sin(2.\pi f_0 t)$

a-. $x(t)=\cos(2.\pi f_0 t)$ périodique de période $T = 1/f_0$

$$C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0 t)cos(2\pi f_0 (t-\tau))dt$$

$$cos(2\pi f_0 t)cos(2\pi f_0 (t-\tau)) = \frac{1}{2}\left(cos(2\pi f_0 (2t-\tau)) + cos(2\pi f_0 \tau)\right)$$

$$C_x(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0 (2t-\tau)) + cos(2\pi f_0\tau)dt = \frac{1}{2T}\left(\int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0(2t-\tau))dt + \int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0\tau)dt\right)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0(2t-\tau))dt = 0 \text{ et } \int_{-T/2}^{T/2} cos(2\pi f_0\tau)dt = Tcos(2\pi f_0\tau)$$

on a donc $C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \frac{1}{2}cos(2\pi f_0 \tau)$

b.-. $y(t)=sin(2.\pi f_0 t)$

Remarquons que $y(t)=sin(2.\pi f_0 t) = cos(2.\pi f_0 .(t-T_0/4))$

$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau)\rangle = \left\langle x(t-\frac{T_0}{4}), x(t-\frac{T_0}{4}-\tau)\right\rangle = C_x(\tau) = \frac{1}{2}cos(2\pi f_0\tau)$$

La corrélation est invariante par translation temporelle.

Exercice 2 QROC 96

Soit $x(t) = a.e^{-at}.1I_{[0,+\infty[}(t)$ avec a réel positif

1- Montrer que x(t) est un signal à énergie finie.

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = a^2 \int_0^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{1}{2a}$ fini donc x(t) signal à énergie finie.

2- Calculer la fonction d'autocorrélation de x(t)

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)}1I_{[0,+\infty[}(t)1I_{[\tau,+\infty[}(t)dt = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)}1I_{[0,+\infty[\cap[\tau,+\infty[}(t)dt$$

Si τ est négatif $C_x(\tau) = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)}1I_{[0,+\infty[}(t)dt = a^2 e^{a\tau}\int_0^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{a}{2}e^{a\tau}$

Si τ positif $C_x(\tau) = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(2t-\tau)}1I_{[\tau,+\infty[}(t)dt = a^2 e^{a\tau}\int_{\tau}^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{a}{2}e^{-a\tau}$

soit $C_x(\tau) = \frac{a}{2}e^{-a|\tau|}$

3- Calculer la densité spectrale d'énergie de x(t).

$S_x(f) = TF[C_x(\tau)] = |X(f)|^2$

$X(f) = \frac{1}{1+\frac{2.j\pi.f}{a}} = \frac{a}{a+2.j\pi.f}$ (propriété de la dilatation)

soit le résultat $S_x(f) = \frac{2a^2}{a^2+4\pi^2.f^2}$

4- Que se passe-t'il lorsque a tend vers l'infini ?

Lorsque a tend vers l'infini X(f) tend vers 1 et x(t) vers l'impulsion de Dirac.
L'énergie est est uniformément répartie dans le domaine des fréquences.

Exercice 3 QROC 97

Soit $x(t)=\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ avec θ réel positif

1- Montrer que x(t) est un signal à puissance moyenne finie.

x(t) est un signal dont l'amplitude est bornée et périodique de période $T = 1/f_0$
C'est en conséquence un signal à puissance moyenne finie.

2- Calculer la fonction d'autocorrélation de x(t).

$$C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 t+\theta)\cos(2\pi f_0 (t-\tau)+\theta)\,dt$$

$$\cos(2\pi f_0 t+\theta)\cos(2\pi f_0 (t-\tau)+\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\pi f_0 (2t-\tau)+2\theta) + \cos(2\pi f_0 \tau)\right)$$

$$C_x(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 (2t-\tau)+2\theta) + \cos(2\pi f_0 \tau)\,dt = \frac{1}{2T}\left(\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 (2t-\tau)+2\theta)\,dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 \tau)\,dt\right)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 (2t-\tau)+2\theta)\,dt = 0 \text{ et } \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 \tau)\,dt = T\cos(2\pi f_0 \tau)$$

on a donc $C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$

3- Calculer la densité spectrale de puissance de x(t). commenter.

$$S_x(f) = TF[C_x(\tau)] = \frac{1}{2} TF[\cos(2\pi f_0 \tau)] = \frac{1}{4} TF\left[e^{2j\pi f_0 \tau} + e^{-2j\pi f_0 \tau}\right] = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{4}$$

La puissance de $\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ est localisée en f_0 et $-f_0$. Ce résultat est naturel puisque la fonction $\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ est périodique de période $T=1/f_0$.

4- Soit $y(t) = x(t-T_0/2)$ avec $T_0 = 1/f_0$
Que valent la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de y(t) ?

$$C_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau)\rangle = \left\langle x(t-\frac{T_0}{2}), x(t-\frac{T_0}{2}-\tau)\right\rangle = C_y(\tau)$$

On retrouve en conséquence la même densité spectrale de puissance pour y. Décaler un signal dans le temps ne modifie par la répartition de la puissance dans le domaine des fréquences.