Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION
AU
SIGNAL DETERMINISTE

Exercices
Corrections
Chapitre 5

Yves DELIGNON

5. FILTRAGE

Exercice 1 QROC 98
Soit $x(t) = e^{-at}\, 1I_{[0,+\infty[}(t)$, a>0
1 - x(t) est-il un signal à énergie finie, à puissance moyenne finie ?

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = a^2 \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$ fini donc x(t) signal à énergie finie.

2 - Calculer la densité spectrale (d'énergie ou de puissance suivant le résultat de la question 1) de x(t).

$S_x(f) = TF[C_x(\tau)] = |X(f)|^2$

$X(f) = \frac{1}{1 + \frac{2.j\pi.f}{a}} = \frac{a}{a + 2.j\pi.f}$ (propriété de la dilatation)

soit le résultat $S_x(f) = \frac{2a^2}{a^2 + 4\pi^2.f^2}$

3 - On veut générer le signal $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} 1I_{[0,T]}(u)x(t-u)du$

Calculer la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert du filtre générant y(t) à partir de x(t).
y(t) s'écrit en fonction de la réponse impulsionnelle h(t) du filtre y(t) = (x*h)(t).

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} 1I_{[0,T]}(u)x(t-u)du = \frac{1}{T} 1I_{[0,T]}(t) * x(t) = h(t) * x(t)$

Par identification, on a $h(t) = \frac{1}{T} 1I_{[0,T]}(t)$

Le filtre est-il causal ?

Puisque h(t) est nul pour t < 0, le filtre est causal (l'effet ne précède pas la cause)

Quelle est la nature de ce filtre (passe bande, passe tout, passe-bas , passe - haut) ?

La nature spectrale du filtre dépend de la fonction de transfert

$$H(f) = TF[h(t)] = \frac{1}{T} TF\left[1I_{[0,T]}(t)\right] = \frac{1}{T} TF\left[rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)\right] = e^{-j\pi fT}\, sin\,c(Tf)$$

Les fréquences hautes sont aisni attenuées par le filtre, c'est un passe-bas.

4- Calculer la densité spectrale d'énergie de y(t).
$S_x(f) = TF[C_x(\tau)] = |X(f)|^2$

$X(f) = \frac{1}{1 + \frac{2.j\pi.f}{a}} = \frac{a}{a + 2.j\pi.f}$ (propriété de la dilatation)

soit le résultat $S_x(f) = \frac{2a^2}{a^2 + 4\pi^2.f^2}$

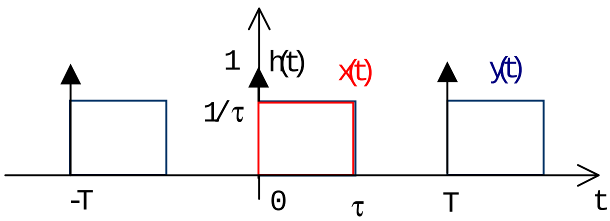
Exercice 2 QROC 96TTV

Soit x et y l'entrée et la sortie d'un filtre linéaire de reponse impulsionelle h

avec $x(t)=\frac{1}{\tau}1I_{[0,\tau]}(t)$, $h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)$ avec $T\geq\tau$ et $y(t)=(h*x)(t)$

1.-. Calculer y(t). Représenter x(t), y(t) et h(t).

$$y(t)=(x*h)(t)=\frac{1}{\tau}1I_{[0,\tau]}(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau}1I_{[0,\tau]}(t)*\delta(t-kT)=\frac{1}{\tau}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}1I_{[0,\tau]}(t-kT)$$

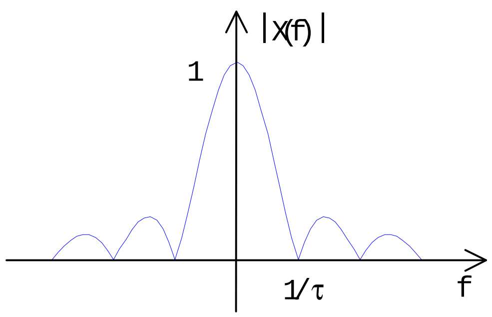


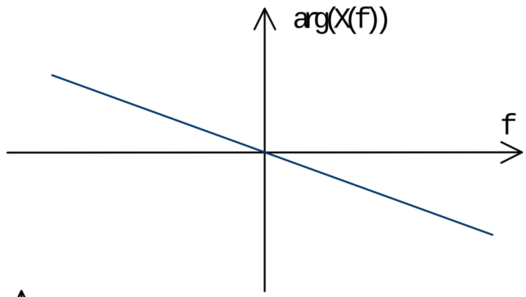
2.-. Calculer les spectres X(f) et H(f) et Y(f). Représenter X(f), H(f) et Y(f).

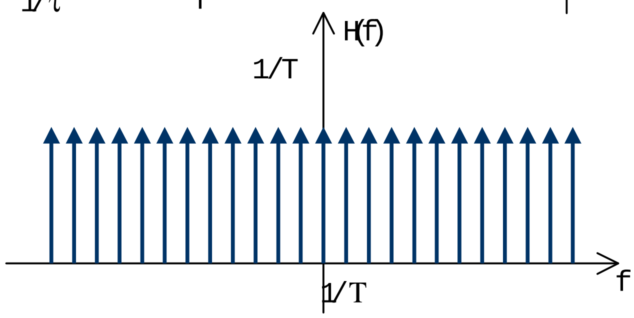
$$X(f)=\frac{1}{\tau}TF\left[rect\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)\right]=\frac{1}{\tau}e^{-j\pi f\tau}TF\left[rect\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]=\frac{1}{\tau}e^{-j\pi f\tau}\tau\, sin\,c(\tau f)=e^{-j\pi f\tau}\,sin\,c(\tau f)$$

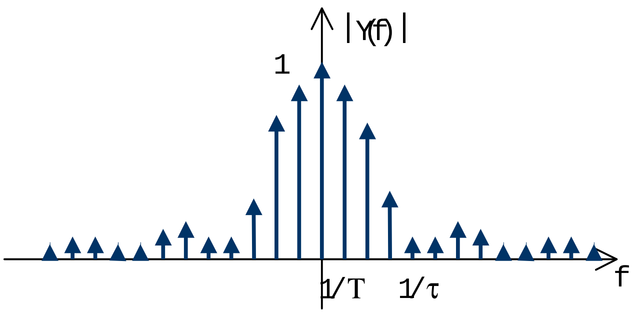
$$H(f)=TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)\right]=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$Y(f)=X(f)H(f)=X(f)TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T)\right]=X(f)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$









3.-. Quel est l'effet de la convolution temporelle de x(t) par le peigne de Dirac sur le spectre Y(f).

Dans le temps, la convolution d'un signal x(t) par un peigne de Dirac a pour effet de le périodiser. Dans le domaine des fréquences, le spectre X(f) est discrétisé.

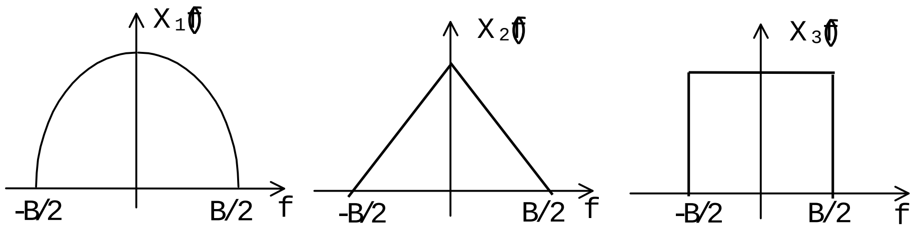
4.-. Que se passe t'il lorsque $\tau \to 0$ et lorsque $\tau = T$.

lorsque $\tau \to 0$, X(f) tend vers la constante 1 et Y(f) vers le peigne de Dirac dans le domaine des fréquences. Dans le domaine temporel, x(t) tend vers l'impulsion de Dirac et y(t) converge vers le peigne de Dirac.

lorsque $\tau = T$, y(t) converge vers la constante 1 et Y(f) tend vers l'impulsion de Dirac $\delta(f)$.

Exercice 3 QROC97

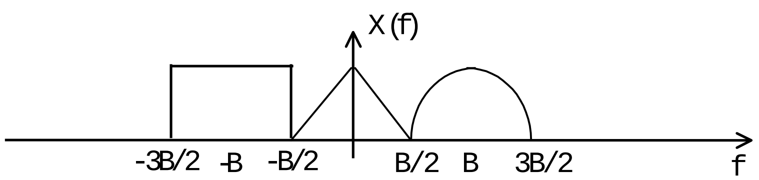
Considérons trois signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ dont les spectres sont réels et de support]-B/2;B/2[.



Soit $x(t) = x_1(t)e^{j2\pi Bt} + x_2(t) + x_3(t)e^{-j2\pi Bt}$

1 - Calculer le spectre X(f) et représenter le graphiquement.

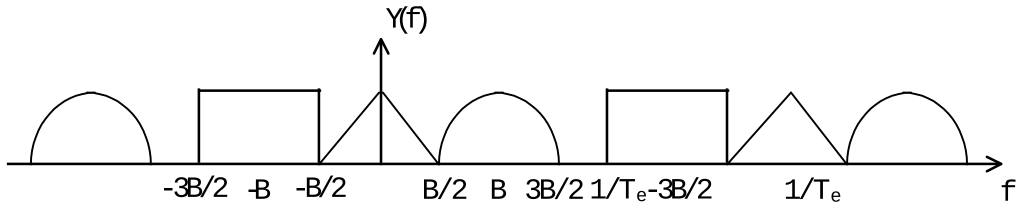
$X(f) = X_1(f - B) + X_2(f) + X_3(f + B)$ Propriété de la modulation



2 - Soit $y(t) = x(t).\ T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_e)$ l'échantillonnage de x(t)

a Calculer le spectre de Y(f), le représenter graphiquement.

$$Y(f) = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$



b Quelle condition doit satisfaire T_e pour que l'on puisse restituer x(t) à partir de y(t).

Il ne doit pas y avoir recouvrement entre répétitions des spectres, c'est à dire
$1/T_e - 3B/2 > 3B/2$ d'où $T_e < 1/3B$ (Théorème de Shannon)
c. Expliquer comment restituer $x_2(t)$ à partir de y(t).

Pour isoler le specte $X_2(f)$, on effectue un filtrage passe-bas de fréquence de coupure B/2, on a alors :
$\hat{x}_2(t) = TF^{-1}\left[Y(f).1I_{[-B/2,B/2]}(f)\right]$ si $T_e < 1/3B$ alors $\hat{x}_2(t) = x_2(t)$

Exercice 4 QROC 97
Soit $x(t) = \dfrac{1}{a}\, trian\left(\dfrac{t}{a}\right)$ avec a réel positif
1 Calculer la transformée de Fourier de x(t) sachant que $TF[trian(t)] = sinc^2(f)$

$$X(f) = TF\left[\frac{1}{a} trian\left(\frac{t}{a}\right)\right] = \frac{1}{a} TF\left[trian\left(\frac{t}{a}\right)\right] = \frac{1}{a} a\, sinc^2(af) = sinc^2(af)$$ (propriété de l'homothétie)

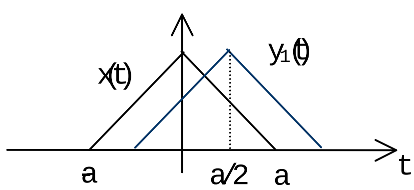
2. a. Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants:

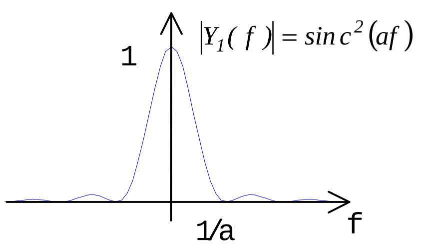
$y_1(t) = x(t) * \delta(t-a/2)$ $\qquad y_2(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$ $\qquad y_3(t) = x(t).T.\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

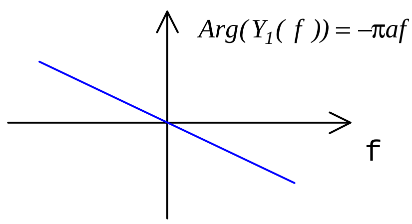
$$Y_1(f) = X(f).TF\left[\delta(t-a/2)\right] = e^{-j\pi fa} X(f)$$

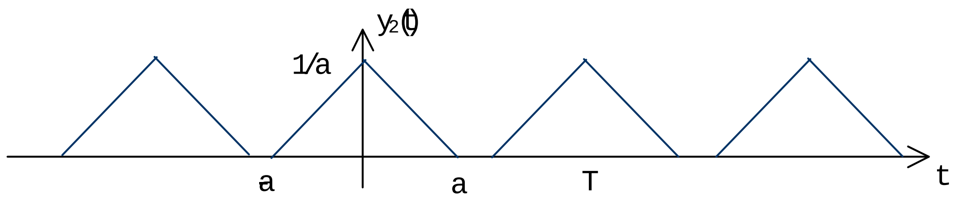
$$Y_2(f) = X(f).TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right] = X(f).\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\frac{k}{T})\delta(f-\frac{k}{T})$$
$$Y_3(f) = X(f) * T.TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right] = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f-\frac{k}{T})$$

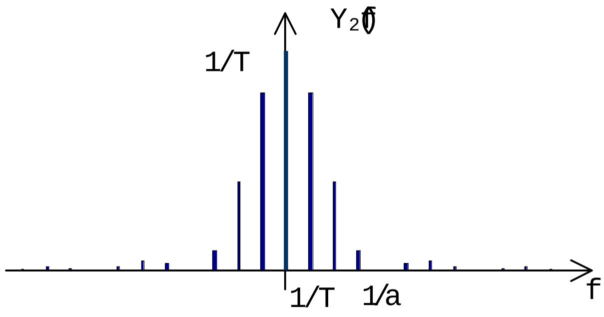
b Représenter graphiquement et interpréter les résultats dans le domaine temporel et dans le domaine spectral.

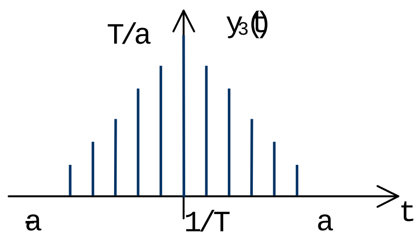


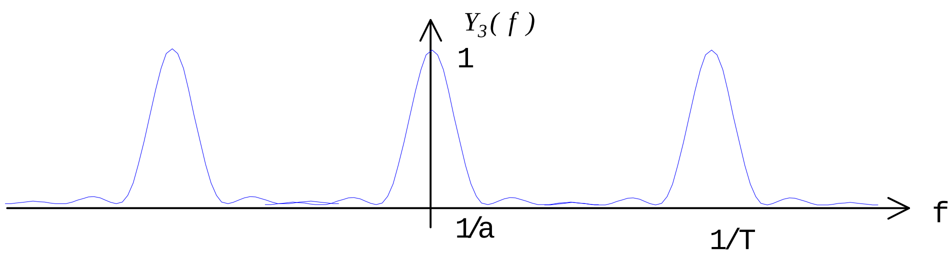












3 Que deviennent $x(t)$, $y_1(t)$ et $y_2(t)$ ainsi que leurs spectres respectifs lorsque a tend vers 0 ?

$x(t)$ et $y_1(t)$ tendent vers l'impulsion de Dirac alors que $y_2(t)$ tend vers le peigne de Dirac lorsque a tend vers zéro.
$X(f)$ et $Y_1(f)$ tendent vers la constante 1 et $Y_2(f)$ vers le peigne de Dirac en fréquence.

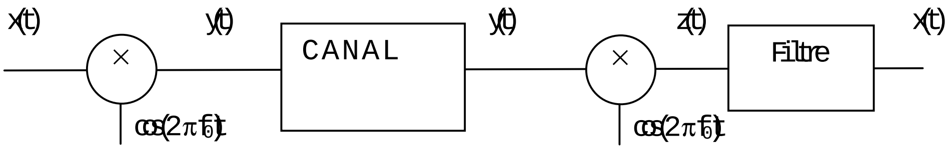
4. Quelle opération proposez-vous pour retrouver $x(t)$ à partir de $y_3(t)$ (on supposera a quelconque dans cette question)?

A l'aide d'un filtre passe bas de fréquence de coupure 1/2T, on récupère une partie du spectre de $x(t)$. Puisque le support de $X(f)$ est infini, ce filtre passe-bas permet seulement d'approcher $x(t)$, approximation qui sera d'autant meilleurs que T sera petit.

Exercice 5 QROC 99

Soit $x(t)=\mathrm{sinc}(t)$. $x(t)$ est modulé sur la fréquence porteuse f_0 pour être émis sur un canal de propagation.

Soit $y(t)$ le signal émis $y(t)=x(t).\cos 2\pi f_0 t$.

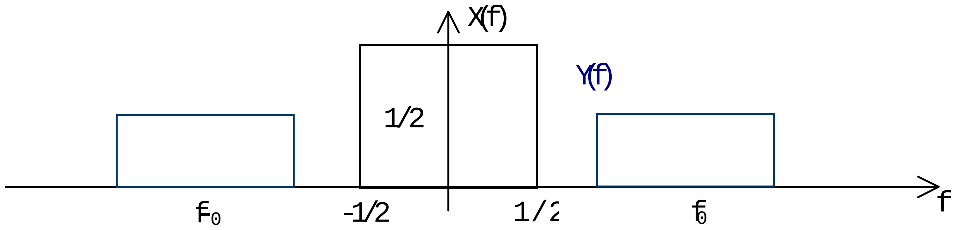


1 Calculer les spectres de $x(t)$ et $y(t)$. Représenter-les sur un graphique..

$X(f)=TF[x(t)] = TF[\mathrm{sinc}(t)]=\mathrm{rect}(f)$

$Y(f) = TF[y(t)] =$ $Y(f)=TF\left[x(t).\dfrac{e^{2j\pi f_0 t}+e^{-2j\pi f_0 t}}{2}\right]=\dfrac{1}{2}TF\left[x(t).e^{2j\pi f_0 t}\right]+\dfrac{1}{2}TF\left[x(t).e^{-2j\pi f_0 t}\right]$

$$Y(f)=\frac{1}{2}\left(X(f-f_0)+X(f+f_0)\right)=\frac{1}{2}\left(rect(f-f_0)+rect(f+f_0)\right)$$



2 $x(t)$ et $y(t)$ sont t'ils à énergie finie, à puissance moyenne finie ?

D'après l'identité de Parseval, $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\,df$

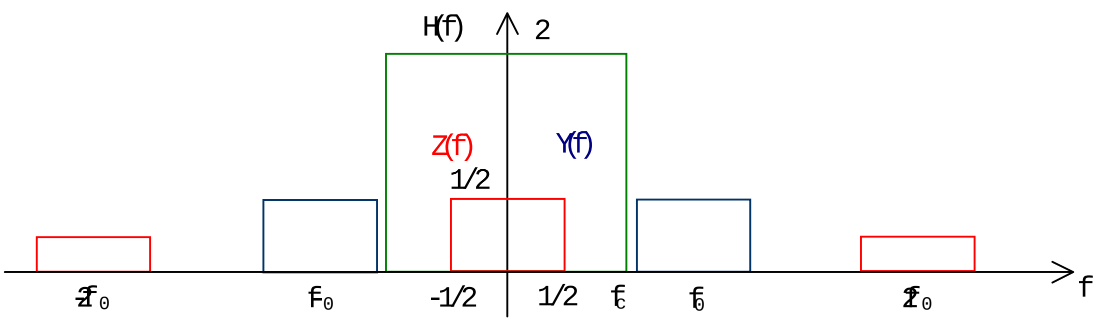
On a donc $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|rect(f)|^2\,df=1$ fini, $x(t)$ est donc un signal à énergie finie.

De même, $Y(f)$ est borné en fréquence et en amplitude, $y(t)$ est donc un signal à énergie finie.

3 Après transmission, on reçoit $y(t)$. On calcule alors $z(t)=y(t).\cos 2\pi f_0 t$. Calculer le spectre de $z(t)$ puis représenter le sur un graphique.

$$Z(f)=TF\left[y(t).\frac{e^{2j\pi f_0 t}+e^{-2j\pi f_0 t}}{2}\right]=\frac{1}{2}TFy\left[y(t).e^{2j\pi f_0 t}\right]+\frac{1}{2}TF\left[y(t).e^{-2j\pi f_0 t}\right]$$

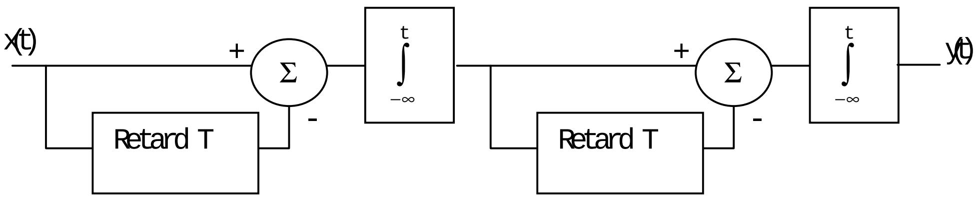
$$Z(f)=\frac{1}{2}\left(Y(f-f_0)+Y(f+f_0)\right)=\frac{1}{4}rect(f-2f_0)+\frac{1}{4}rect(f+2f_0)+\frac{1}{2}rect(f)$$



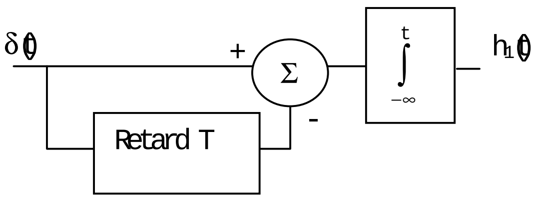
4 Proposer un filtre pour récupérer $x(t)$ à partir de $z(t)$ (spécifier la réponse impulsionnelle ou la fonction de transfert)

Pour retrouver $x(t_0)$ à partir de $z(t)$, il suffit d'appliquer un filtre passe -bas de fréquence de coupure comprise entre ½ et $2f_0$-1/2 et de gain 2. Voir H(f) sur graphe.

Exercice 6 (Simon Haykin)
Calculer la fonction de transfert du système linéaire représenté par le diagramme suivant :



Considérons tout d'abord le garphe suivant et injectons en entrée une impulsion de Dirac.



$$h_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)-\delta(u-T)du$$

si t<0 $h_1(t)=0$

si $0\leq t\leq T$ $\quad h_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)du=1$

si t<0 $\quad h_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)du-\int_{-\infty}^{t}\delta(u-T)du=1-1=0$

on a donc $h_1(t)=1I_{[0,T]}(t)$

Considérons maintenant le graphe en entier. Ce système est la mise en série de deux filtres linéaires et invariants dans le temps de réponse impulsionnelle $h_1(t)$.
On a alors comme réponse impulsionnelle du système :

$$h(t)=1I_{[0,T]}(t)*1I_{[0,T]}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{[0,T]}(u)1I_{[0,T]}(t-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{[0,T]}(u)1I_{[t-T,t]}(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}1I_{[0,T]\cap[t-T,t]}(u)du$$

Si t<0 ou t > 2T $\quad [0,T]\cap[t-T,t]=\varnothing$ et h(t) = 0
Si $t\in[0,T]$ $\quad [0,T]\cap[t-T,t]=[0,t]$ et h(t) = t
Si $t\in[T,2T]$ $\quad [0,T]\cap[t-T,t]=[t-T,T]$ et h(t) = 2T-t

d'où $h(t)=Ttrian\left(\frac{t-T}{T}\right)$

Exercice 7 (Simon Haykin)
Soit x(t) un signal que l'on cherche à intégrer en continu sur un intervalle de longueur T.

$$y(t)=\int_{t-T}^{t}x(\tau)d\tau$$

Montrer que y(t) est la réponse à x(t) d'un filtre de fonction de transfert $H(f)=\mathrm{sinc}(fT)\exp(-j\pi fT)$.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)1I_{[t,t-T]}(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)1I_{[0,T]}(t-\tau)d\tau=(x*h)(t)$$

Par identification, on a $h(t) = 1I_{[0,T]}(t) = rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$

Sachant que TF[rect(t)]= sinc(f), et à l'aide des propriétés de la translation et de la dilatation, on montre que H(f)=sinc(fT)exp(-jπfT)