Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en Communication
Année 2000

INTRODUCTION AU SIGNAL DETERMINISTE

Exercices
Corrections
Chapitre 6

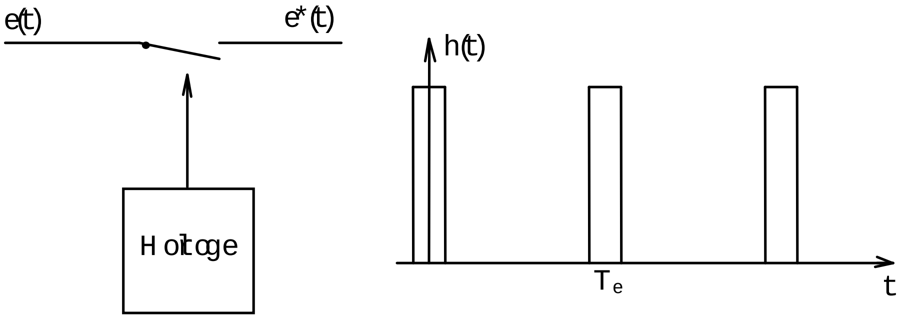
Yves DELIGNON

6. ECHANTILLONNAGE

Exercice 1

I ECHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL

Un commutateur analogique découpe un signal e(t) sinusoïdal défini par $e(t)=E.\cos(2.\pi f_0 t)$ au rythme d'un signal d'horloge h(t) de fréquence f_e et de rapport cyclique $\alpha=\tau/T_e$.



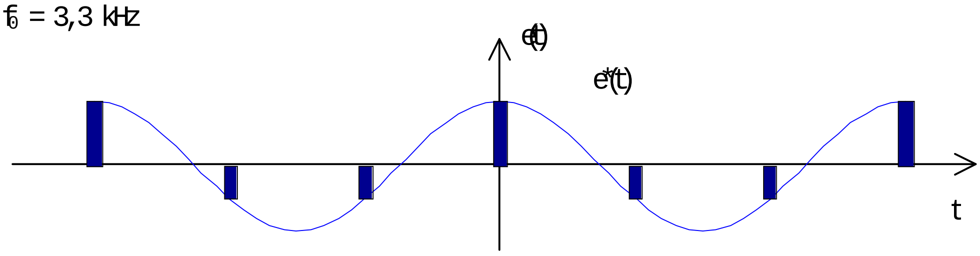
Il en résulte un signal e*(t) appelé signal échantillonné.

I.1. Etude dans le domaine temporel.

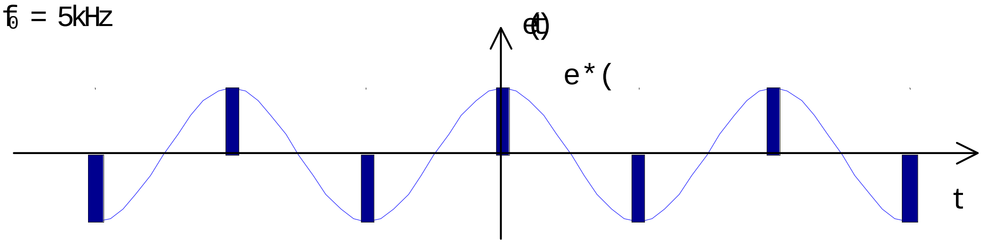
On donne f_e = 10kHz

I.1.1. Représenter, e(t) et e*(t) pour quatre fréquence de e(t) : f_0 = 3,3 kHz ; f_0 = 5kHz ; f_0 = 6,6kHz et f_0 = 10kHz.

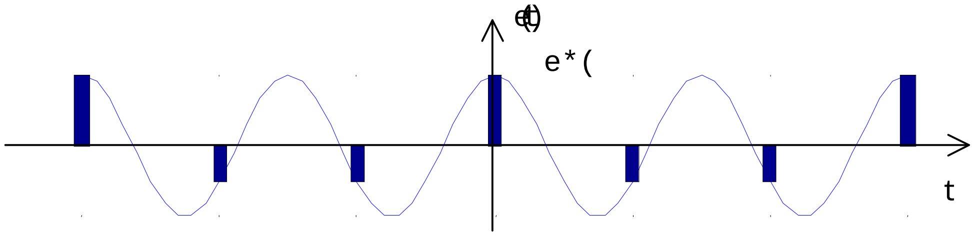
f_0 = 3,3 kHz



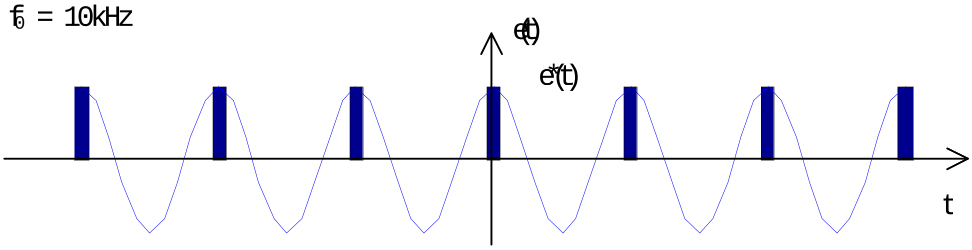
f_0 = 5kHz



f_0 = 6,6kHz



f_0 = 10kHz

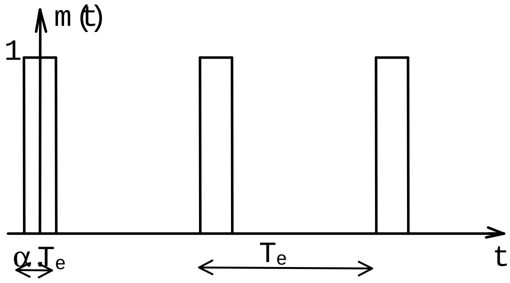


I.1.2. Déduire de ces représentations graphiques la fréquence apparente f_a du signal échantillonné et son expression en fonction de f_0 dans les quatre cas. Conclure.

f_0 = 3,3 kHz f_a=3,3 kHz
f_0 = 5kHz f_a=5 kHz
f_0 = 6,6kHz f_a=3,3 kHz
f_0 = 10kHz f_a=0 kHz

$f_a = f_0$ si $f_0 < f_e/2$
$f_a = f_e - f_0$ si $f_0 > f_e/2$

I.2. Etude dans le domaine des fréquences
L'échantillonnage est obtenu en multipliant e(t) par le signal m(t) suivant :



I.2.1. Développer en série de Fourier m(t).

m(t) étant périodique de période T_e, il peut se décomposer en série de Fourier

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_k e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}} \quad \text{avec} \quad m_k = \frac{1}{T_e}\int_{-T_e/2}^{T_e/2} m(t) e^{-2j\pi\frac{kt}{T_e}} dt$$

On montre que $m_k = \alpha \, sinc(\alpha k)$

Le développement en série de Fourier s'écrit alors $m(t) = \alpha \sum_{k=-\infty}^{+\infty} sinc(k\alpha) e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}}$

Puisque m(t) est une fonction paire

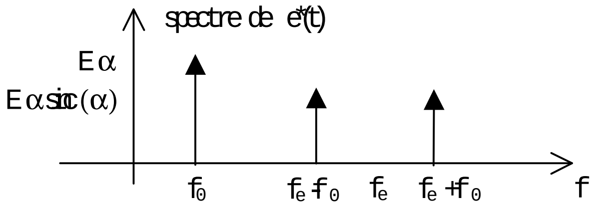
$$m(t) = \alpha\left(1 + \sum_{k=-\infty}^{1} sinc(k\alpha) e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}} + \sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha) e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}}\right)$$

on a $\sum_{k=-\infty}^{1} sinc(k\alpha) e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}} = \sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha) e^{-2j\pi\frac{kt}{T_e}}$

et $m(t) = \alpha\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha)\left(e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}} + e^{2j\pi\frac{kt}{T_e}}\right)\right) = \alpha\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} sinc(k\alpha) \cos\left(2\pi\frac{kt}{T_e}\right)\right)$

I.2.2. En déduire le spectre de e*(t). (On le représentera en se limitant aux trois premières composantes).
On a e*(t) = $E\cos(2\pi f_0 t)$m(t)

$$e^*(t) = E\alpha\left(cos(2\pi f_0 t) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} sin\,c(k\alpha)\, cos(2\pi k f_e t) cos(2\pi f_0 t) \right)$$
$$e^*(t) = E\alpha\left(cos(2\pi f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} sin\,c(k\alpha) \left(cos(2\pi (f_0 + k f_e) t) + cos(2\pi (f_0 - k f_e) t) \right) \right)$$



II. RESTITUTION D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE.

II.1. On souhaite restituer e(t) par filtrage passe-bas de e*(t). Si la fréquence d'échantillonnage f_e est fixée, quelle est la valeur maximale admissible de la fréquence f_0 de e(t) ?

Pour restituer par filtrage passe-bas les raies en en f_0 et $-f_0$, il faut que $f_0 < f_e - f_0$, soit $f_0 < f_e/2$

II.2. Quelle est alors la fréquence de coupure du filtre passe bas idéal qui permet de restituer une image de e(t) ?

Pour restituer uniquement les raies en f_0 et $-f_0$, on applique un filtre passe bas de fréquence de coupure comprise entre f_0 et $f_e - f_0$. La restitution de e(t) est donc possible si et seulement si $f_0 < f_e - f_0$ soit $f_e > 2f_0$.

II.3. Montrer que l'on retrouve les résultats de la question I.1.2.

Si la condition $f_0 < f_e/2 = 5kHz$ est vérifiée, on récupère un signal de fréquence $f_a = f_0$
Si ce n'est pas le cas, on récupère la raie $f_a = f_e - f_0$

Ainsi on retrouve les résultats de la question I.1.2

f_0 = 3,3 kHz f_a=3,3 kHz
f_0 = 5kHz f_a=5 kHz
f_0 = 6,6kHz f_a=3,3 kHz
f_0 = 10kHz f_a=0 kHz

III. ECHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL PERIODIQUE NON SINUSOÏDAL

Le signal e(t) découpé par le commutateur analogique est maintenant de la forme $e(t) = E\left|cos 2\pi f_0 t\right|$ avec f_0 = 1kHz

III.1. Quelle est la fréquence f_1 de e(t) ?

La période de e(t) est moitié plus petite que celle de $cos 2\pi f_0 t$, c'est à dire $T_1 = T_0/2$. On a donc $f_1 = 2f_0 = 2kHz$

III.2. A partir de quel rang n l'amplitude des harmoniques est-elle au moins 100 fois plus faible que celle du fondamental ?

Calcul des harmoniques

$e(t) = E\left|\cos 2\pi f_0 t\right|$ $\quad e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2j\pi f_1 kt} = X_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi f_1 kt)$ car e(t) est paire

$$X_k = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e(t)e^{-2j\pi f_1 kt}dt = \frac{f_1 E}{2}\left(\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi(kf_1 - f_0)t}dt + \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi(kf_1 + f_0)t}dt\right)$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi f_0(2k-1)t}dt = \left[\frac{e^{-2j\pi f_0(2k-1)t}}{-2j\pi f_0(2k-1)}\right]_{-T_1/2}^{T_1/2} = \frac{e^{j\pi f_0(2k-1)T_1} + e^{-j\pi f_0(2k-1)T_1}}{2j\pi f_0(2k-1)}$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi f_0(2k-1)t}dt = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}(2k-1)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(2k-1)}}{2j\pi f_0(2k-1)} = \frac{-2j(-1)^k}{2j\pi f_0(2k-1)} = \frac{(-1)^k}{\pi f_0(1-2k)}$$

De même $\displaystyle\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-2j\pi(kf_1+f_0)t}dt = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}(2k+1)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(2k+1)}}{2j\pi f_0(2k+1)} = \frac{(-1)^k}{\pi f_0(1+2k)}$

$$X_k = \frac{Ef_1}{2}\left(\frac{(-1)^k}{\pi f_0(1-2k)} + \frac{(-1)^k}{\pi f_0(1+2k)}\right) = \frac{2E}{\pi}\frac{(-1)^k}{(1-4k^2)}$$

soit $\displaystyle e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2j\pi f_1 kt} = \frac{2E}{\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(1-4k^2)}\cos(2\pi f_1 kt)\right)$

On cherche n tel que $\displaystyle |X_n| \le \frac{|X_1|}{100}$

or $\displaystyle |X_1| = \frac{4E}{3\pi}$ on a alors $\displaystyle\left|\frac{(-1)^k}{1-4k^2}\right| \le \frac{1}{300}$ soit $100 \le \left|1-4k^2\right|$ ou encore $\displaystyle k \ge \frac{\sqrt{299}}{4} = 8{,}64$

On peut alors négliger les harmoniques d'ordre supérieurs ou égal à 8 et ainsi ne conserver que les huit premières harmoniques.

En déduire la fréquence f_m, à partir de laquelle on peut considérer qu'il n'y a plus de raies spectrales pour e(t).

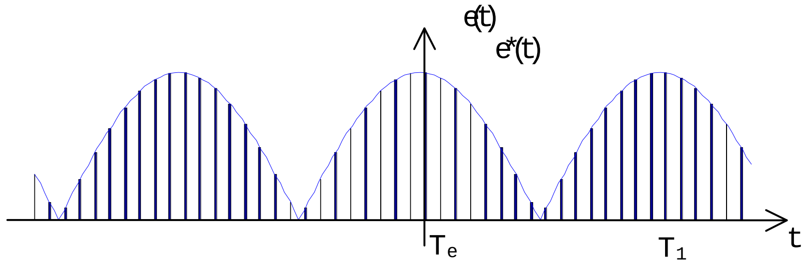
$f_m = 8f_1$ = 16kHz

III.3. Quelle est alors la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage f_e qu'il faut choisir ?

D'après Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieur à $2f_m$=32kHz

Donner alors le nombre d'échantillons nécessaires et représenter e*(t) dans les conditions limites.

Pour une fréqunec d'échantillonnage de 32kHz, on a 16 (=32/2) échantillons par périodes.



Exercice 2 QROC 98

Soit le signal $x(t) = 2\alpha \,\mathrm{sinc}(2\alpha t)$

1. $X(f)= TF[x(t)](f)$ est-il à support borné ? Quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage ?

   En appliquant la propriété de l'homothétie, on a $X(f) = rect\left(\frac{f}{2\alpha}\right)$

   La fréquence maximale de x(t) étant, la fréquence minimale d'échantillonnage est 2α.

2. Soit un échantillonneur moyenneur de x(t) défini par:

$$\hat{x}(t) = T\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(kT)\delta(t-kT) \text{ avec } y(t) = x(t) * \frac{1}{\theta} rect(\frac{t}{\theta}) \text{ et } \theta \ll T, \quad \theta < 1/\alpha$$

   Montrer que $\hat{x}(t)$ peut se mettre sous la forme $\hat{x}(t) = \frac{T}{\theta}\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right) * x(t)\right] . \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

   On peut écrire $\hat{x}(t) = T\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(kT)\delta(t-kT) = T\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(t)\delta(t-kT) = Ty(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

   or $y(t) = x(t) * \frac{1}{\theta} rect(\frac{t}{\theta})$, d'où $\hat{x}(t) = \frac{T}{\theta}\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right) * x(t)\right] . \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

3. En déduire le spectre $\hat{X}(f)$ de $\hat{x}(t)$ et représenter le graphiquement.

   Que se passe t'il lorsque θ tend vers 0 ?

$$\hat{X}(f) = TF\left[\frac{T}{\theta}\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right) * x(t)\right]\right] * TF.\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\right] = \frac{T}{\theta}\left[TF\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right)\right] X(f)\right] * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$TF\left[rect\left(\frac{t}{\theta}\right)\right] = \theta \,\mathrm{sinc}(\theta f)$$

et

$$\hat{X}(f) = \mathrm{sinc}(\theta f) X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(\theta\left(f-\frac{k}{T}\right)\right) X\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

   Lorsque θ tend vers 0, $\frac{1}{\theta} rect(\frac{t}{\theta})$ tend vers une impulsion de Dirac et $\mathrm{sinc}(\theta f)$ tend vers 1.

   L'échantillonnage tend vers l'idéal.

4. Sachant que $\mathrm{sinc}(\theta f)$ peut être considéré comme constant pour $f \in \left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$, quelle condition doit vérifier θ pour que x(t) puisse être récupéré par filtrage passe-bas ?

Pour que l'on puisse retrouver x(t) à partir d'un filtrage passe-bas du signal échantillonné, $\mathrm{sinc}(\theta f)$ ne doit apporter aucune distorsion sur le support en fréquence de x(t), c'est à dire

$$\alpha < \frac{1}{3\theta}$$