

Energie / Puissance moyenne finie

$$E_x = \int_R |x(t)|^2 dt < +\infty \quad P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

$x(t)$ à Energie fini si $E_x < +\infty$ $x(t)$ à Puissance finie si $P_x < +\infty$

Signaux élémentaires

Echelon unité $U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	Fonction signe $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$	
Signal rectange $\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	Signal triangle $\text{trian}(t) = \begin{cases} 1- t & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	
Fonction rampe $\text{ramp}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	Sinus cardinal $\text{sinc}(t) = \text{sin}(\pi t) / \pi t$ $\text{Bsin}(BT) \rightarrow$	

Impulsion de Dirac

Notation : $\delta(t)$ et vérifie : $\delta(t)=0 \quad \delta(0)=+\infty \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t)$$

Propriétés :

→ **Principe de localisation :** $x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$

→ **Rappel convolution :**

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u) x_2(t-u) du$$

$$(x * \delta)(t-t_0) = \int x(u) \cdot \delta(t-t_0-u) du = x(t-t_0)$$

→ **Périodisation d'un signal : Peigne de Dirac :**

$$x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$$

Convolver un signal $x(t)$ par le peigne de Dirac revient à **à périodiser** $x(t)$ à la période T .

$$x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta(t-kT)$$
 discrétisation temporelle

Produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) y(k)$	Inégalité de Cauchy-Schwarz : $ \langle x, y \rangle \leq \ x\ \cdot \ y\ $
--	---

Espace des signaux à Energie finie

	Signal à tps continu L_2	Signal à tps discret l_2
Produit scalaire ($= \langle x, y \rangle$)	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y^*(k)$
Norme $\ x\ $ ($= \sqrt{\langle x, x \rangle}$)	$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt}$	$\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) ^2}$
Distance $d(x,y)$ ($= \ x-y\ $)	$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) - y(t) ^2 dt}$	$\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) - y(k) ^2}$

L'énergie d'un signal de $L_2 \rightarrow E_x = \|x\|^2$
Deux signaux sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ et colinéaires si $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$

Signaux de puissance moyenne finie

Signaux périodiques	Temps continu	Temps discret
Produit scalaire	$\frac{1}{T} \int_T x(t) y^*(t) dt$	$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) y^*(k)$
Norme	$\sqrt{\frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt}$	$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) ^2}$
Distance	$\sqrt{\frac{1}{T} \int_T x(t) - y(t) ^2 dt}$	$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) - y(k) ^2}$

Sgnx non périodiques	Temps continu	Temps discret
Produit scalaire	$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt$	$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N x(k) y^*(k)$
Norme	$\sqrt{\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) ^2 dt}$	$\sqrt{\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N x(k) ^2}$
Distance	$\left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) - y(t) ^2 dt \right)^{1/2}$	$\sqrt{\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N x(k) - y(k) ^2}$

La puissance d'un signal : $P_x = \|x\|^2$

Autocorrélation & Intercorrélation

→ **Autocorrélation :** $C_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$

→ **Intercorrélation :** $C_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$

- Propriétés :**
- $C_x(0) = P_x$ ou E_x suivant le type de signal
 - Si x est réel, l'autocorrélation de x est une fonction paire $\Leftrightarrow C_x(\tau) = C_x(-\tau)$
 - $C_x(\tau)$ est maximal en 0
 - si $x = \delta \Rightarrow C_x(\tau) = \delta(\tau)$

Série de Fourier

Attention : Ne concerne que les signaux périodiques

$$x(t) = \sum_{k \in Z} x_k e^{2j\pi \frac{k}{T} t} \quad \text{Avec} \quad x_k = \langle x(t), e^{2j\pi \frac{k}{T} t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2j\pi \frac{k}{T} t} dt$$

x_0 est la **composante continue** de $x(t)$, c'est aussi sa valeur moyenne

$x_1 e^{2j\pi t/T} + x_{-1} e^{-2j\pi t/T}$ est la **fondamentale** de $x(t)$

$x_k e^{2j\pi kt/T}$ est l'**harmonique d'ordre k** de $x(t)$

Relation de Parseval $P_x = \|x(t)\|^2 = \sum_{k \in Z} |x_k|^2$

Transformée de Fourier [X=spectre]

Transformée de Fourier (TF)	Transformée de Fourier inverse (TF ⁻¹)
$X(f) = \int_R x(t) \cdot e^{-2j\pi ft} dt$	$x(t) = \int_R X(f) \cdot e^{2j\pi ft} df$

Propriétés :

- Translation :** $x(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-2j\pi ft_0} X(f)$
- Modulation :** $e^{2j\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{F} X(f-f_0)$
- Homothétie :** $x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$
- Convolution :** $\begin{matrix} [x * y](t) & \rightarrow & X(f) \cdot Y(f) \\ x(t) \cdot y(t) & \rightarrow & X(f) * Y(f) \end{matrix}$
- Relation de Parseval :** $\langle x(t), y(t) \rangle = \langle X(f), Y(f) \rangle \Leftrightarrow \int_R x(t) y^*(t) dt = \int_R X(f) Y^*(f) df$
- TF d'un peigne de Dirac :** $\sum_{k \in Z} \delta(t-kT) \xrightarrow{F} \frac{1}{T} \sum_{k \in Z} \delta(f - \frac{k}{T})$

Remarques : discrétisation temporelle -TF-> périodisation du spectre
Périodisation temporelle -TF-> discrétisation du spectre

Transformée Fourier à connaître

$\text{TF}[\text{rect}(t)] = \text{sinc}(f)$ $\text{TF}[\text{sinc}(t)] = \text{rect}(f)$ $\text{TF}[\delta(t)] = 1$ et $\text{TF}^{-1}[\delta(f)] = 1$
 $\text{TF}[\text{trian}(t)] = \text{sinc}^2(f)$ $\text{TF}[e^{2j\pi kt/T}] = \delta(f-k/T)$ $\text{TF}[\text{sinc}^2(t)] = \text{trian}(f)$

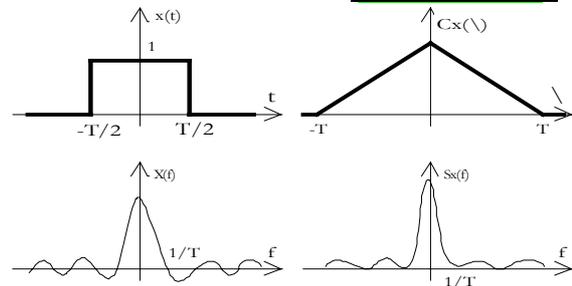
Densité Spectrale d'Energie

$|x(t)|^2$: densité temporelle d'énergie / répartition de l'énergie dans le temps
 $|X(f)|^2$: densité spectrale d'énergie / répartition en fréquence de l'énergie

Notation : $S_x(f) = |X(f)|^2 \rightarrow |X(f)|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$

Théorème de Wiener Khinchine :

$S_x(f) = \text{TF}[C_x(\tau)]$



Densité Spectrale de Puissance

Répartition de la puissance dans l'espace des fréquences

Notation : $S_x(f) = \text{TF}[C_x(\tau)]$

Propriétés :
→ Si $x(t)$ à **énergie finie** : $S_x(f) = |X(f)|^2 = X(f) \cdot X^*(f)$
→ $S_x(f) > 0$
→ $y(t) = x(t-t_0) \rightarrow S_y(f) = S_x(f)$

Suivant le type de signal (DSE / DSP) on a :

$$E_x = \int_R S_x(f) df = C_x(0) \quad P_x = \int_R S_x(f) df = C_x(0)$$

Filtre linéaire invariant dans le temps

Un filtre est un système linéaire invariant dans le temps (LIT) qui transforme un signal d'entrée x en un signal y appelé réponse de x

Si x et y sont à temps continu : $y(t) = \int_R h(t-\tau)x(\tau)d\tau$

Si x et y sont à temps discret : $y(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k-i)x(i)$

Le noyau h du filtre est appelé réponse impulsionnelle

De manière générale :

• $y(t) = (h * x)(t)$ échantillonnage du spectre
avec y = réponse h = réponse impulsionnelle x = excitation.

• $H(f) = TF(h(t))$: → fonction de transfert
• $Y(f) = H(f)X(f)$ |H(f)|=gain fréquentiel / arg H=déphasage du filtre

Propriétés :

- **Causalité** : Un filtre est causal ssi h(t) = 0, pour tout t < 0
- **Stabilité** : Un filtre est dit stable ssi à toute excitation bornée (x(t) < X_M), ∇t, la réponse du filtre est aussi bornée.

Condition nécessaire et suffisante de stabilité : $\int_R |h(t)|dt < +\infty$

Densité spectrale de signaux filtrés :

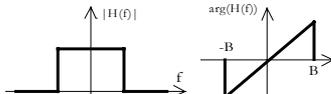
$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

Signal à spectre borné : X(f)=X(f)1_{[-f_{max}, f_{max}](f)}

Les Filtres

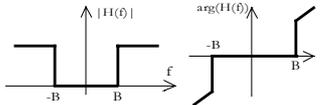
• Filtre passe-bas idéal

$H(f) = e^{-2j\pi f t_0} 1_{[-B, B]}(f)$
 $h(t) = 2B \text{sinc}(2B(t+t_0))$



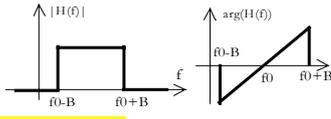
• Filtre passe-haut idéal

$H(f) = 1_{[-B, -B] \cup [B, +\infty]}(f) e^{2j\pi f t_0}$
 $h(t) = \delta(t-t_0) - 2B \text{sinc}(2B(t+t_0))$



• Filtre passe-bande idéal

$H(f) = e^{2j\pi f t_0} 1_{[f_0-B, f_0+B]}(f)$
 $h(t) = 2B \text{sinc}(2B(t+t_0)) e^{2j\pi f t_0}$



Echantillonnage idéal

Permet de passer d'un signal à temps continu à un signal constitué d'une combinaison linéaire d'impulsion de Dirac :

$x_e(t) = x(t) \cdot T_e \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$

$X_e(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{k}{T_e})$

Le spectre X_e(f) est la répétition sur l'axe des fréquences à la période f_e=1/T_e

Théorème de Shannon :

La fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à deux fois la fréquence maximale f_{max} du signal échantillonné : f_e > 2.f_{max}
2f_{max} est appelée fréquence de Shannon

Echantillonnage réel

$x_{er}(t) = T_e \sum_{-\infty}^{+\infty} (x * h)(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) = (x * h)(t) \cdot T_e \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$
 $X_{er}(f) = (X(f) \cdot H(f)) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T_e}) = X_h(f) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T_e})$

sin(-a)=-sin a cos(-a)=cos a tan(-a)=-tan a cotan(-a)=-cotan a	sin(π-a)=sin a cos(π-a)=-cos a tan(π-a)=-tan a cotan(π-a)=-cotan a	sin(π/2-a)=cos a cos(π/2-a)=sin a tan(π/2-a)=cotan a cotan(π/2-a)=tan a
---	---	--

sin(π+a)=-sin a cos(π+a)=-cos a tan(π+a)=tan a cotan(π+a)=cotan a	cos 2a = cos ² a - sin ² a cos 2a = 1 - 2 sin ² a cos 2a = 2 cos ² a - 1 cos ² a = 1/2(1 + cos 2a)	sin 3a = 3 sin a - 4 sin ³ a cos 3a = 4 cos ³ a - 3 cos a tan 3a = 3 tan a - tan ³ a / (1 - 3 tan ² a)
--	--	--

sin(a+b) = sin a cos b + sin b cos a sin(a-b) = sin a cos b - sin b cos a cos(a+b) = cos a cos b - sin a sin b cos(a-b) = cos a cos b + sin a sin b tan(a+b) = (tan a + tan b) / (1 - tan a tan b) tan(a-b) = (tan a - tan b) / (1 + tan a tan b)	sin ² a + cos ² a = 1 1 + tan ² a = 1/cos ² a sin 2a = 2 sin a cos a sin ² a = 1/2(1 - cos 2a)
--	--

2 sin a cos b = sin(a+b) + sin(a-b)
2 cos a cos b = cos(a+b) + cos(a-b)
2 sin a sin b = cos(a-b) - cos(a+b)
sin a + sin b = 2 sin((a+b)/2) . cos((a-b)/2)
sin a - sin b = 2 cos((a+b)/2) . sin((a-b)/2)
cos a + cos b = 2 cos((a+b)/2) . cos((a-b)/2)
cos a - cos b = -2 sin((a+b)/2) . sin((a-b)/2)

$\sin(\frac{a}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$
 $\cos(\frac{a}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$
 $\tan(\frac{a}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$
 $\tan(\frac{a}{2}) = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$
 $\tan(\frac{a}{2}) = \frac{\sin a}{1 + \cos a}$

DERIVEES

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
Cste	0	u ⁿ ; n ∈ N	nu ⁿ⁻¹
x	1	e ^u	u' e ^u
x ⁿ	nx ⁿ⁻¹	ln u	u'/u
1/x	-1/x ²	sin u	u' cos u
√x	1/2√x	cos u	-u' sin u
ln x	1/x		
e ^x	e ^x		
sin x	cos x		
cos x	-sin x		
tan x	1/(cos ² x)	tan u	u'/(cos ² u)
	1+tan ² x		u'/(1+tan ² u)

$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$
 $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
 $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$

PRIMITIVES

$x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$
 $\frac{1}{x} \rightarrow \ln|x| + K$
 $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x} + K$
 $\frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x} + K$
sin x → -cos x + K
cos x → sin x + K
e^x → e^x + K

tan x = -ln|cos x| + K
cot anx = ln|sin x| + K
thx = ln|chx| + K
cos(ax+b) = 1/a sin(ax+b) + K
sin(ax+b) = -1/a cos(ax+b) + K

∫ ln x dx = x ln x - x + K
∫ Arc sin x dx = x Arc sin x + √(1-x²) + K
∫ Arc cos x dx = x Arc cos x - √(1-x²) + K

tan(ax+b) = -1/a ln|cos(ax+b)| + K
1/sin x = ln|tan(x/2)| + K
1/cos x = ln|tan(x/2 + π/4)| + K
1/(sin x cos x) = ln|tan x| + K
u'(x)e^{u(x)} = e^{u(x)} + K
a^x = a^x / ln a + K

∫ f'[u(x)]u'(x)dx = f[u(x)] + K
∫ fⁿ(x)f'(x)dx = fⁿ⁺¹(x)/(n+1) + K
∫ f'(x)/√f(x) dx = √f(x) + K
∫ f'(x)/f(x) dx = ln|f(x)| + K
∫ f'(x)g(x) - g'(x)f(x) / g²(x) = f(x)/g(x) + K

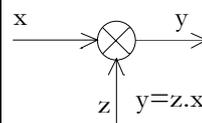
Intégration par partie : ∫ u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - ∫ u'(x)v(x)dx + K

Formule de Moivre

∀ θ ∈ R, ∀ n ∈ Z, { (e^{iθ})ⁿ = e^{inθ}
(cos θ + i sin θ)ⁿ = cos nθ + i sin nθ

Formules d'Euler

cos θ = (e^{iθ} + e^{-iθ}) / 2
sin θ = (e^{iθ} - e^{-iθ}) / 2i



$\sum_0^{\infty} a^{-kn} = \frac{1}{1 - a^{-k}}$

$\rho(\cos \phi + j \sin \phi) = \rho e^{j\phi}$