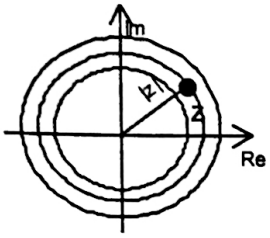
Transformée de Fourier à temps discret

$$TFD(x(n))(f) = X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).e^{-2i\pi nf}$$

Transformée en Z

$$x(k) \xrightarrow{TZ} X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}$$

Cette expression n'a de sens que dans un DC limité : $R^- < |z| < R^+$



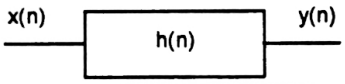
$$R^- = \lim_{x \to +\infty} \left(|x(k)|^{1/k}\right)$$

$$R^+ = \lim \left(\frac{1}{|x(-k)|^{1/k}}\right)$$

Propriétés de la transformée en Z :

Domaine temporel	Transformée en Z
$y(k)=x(k-k_0)$	$Y_z(z)=z^{-k0}.X_z(z)$
translation	
$y(k)=a^k.x(k)$	$Y_z(z)= X_z(z/a)$
$y(k)=k.x(k)$	$Y_z(z) = -z.\frac{dX_z(z)}{dz}$
$w(k) = \sum_l x(l).y^*(l+k)$	$w_z(z) = X_z(z^{-1})Y_z(z)$
fonction d'inter corrélation	
$w(k) = \sum_l x(l).y(k-l)$	$w_z(z) = X_z(z)Y_z(z)$
produit de convolution	

Filtrage numérique



L'opération de filtrage : *c'est une convolution*

Réponse impulsionnelle : **h(n)**

y(n)=(h*x)(n)=(x*h)(n)

Fonction de transfert : H(z) = TZ[h(n)]

Y(z)=H(z).X(z)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}$$

les pôles sont les racines du dénom
les zéros sont les racines du numér

Propriétés :

- Linéarité : soit a et b deux réels : le filtre est linéaire si qd on place $x(n)=a.x_1(n)+b.x_2(n)$, on obtient $y(n)=a.y_1(n)+b.y_2(n)$
- Invariance temporelle : cette propriété est vérifiée si le comportement du filtre ne change pas avec te tps en sortie
- causalité : un échantillon à l'instant n ne dépend que des valeurs présentes ou passées des séquences d'entrée et de sortie
- Stabilité : un filtre est stable si, écarté de sa position d'équilibre [x(n)=0 → y(n)=0)] par l'application d'une impulsion en entrée, il retourne à cet état d'équilibre : si x(n)=δ(n) alors lim y(n)=0 → lim h(n)=0

Filtre non récursifs et récursifs :

- Filtre non récursif : un échantillon de sortie y(n) ne dépend que des échantillons de la séquence d'entrée x(n-i). ex :

$$y(n) = \frac{x(n)+x(n-1)}{2}$$

- Filtre récursif : l'échantillon de sortie dépend d'échantillons de la séquence d'entrée mais aussi d'échantillons de sortie précédents :

$$y(n) = \frac{x(n)+y(n-1)}{2}$$

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie / Infinie :

- RIF : Un filtre RIF est stable. Les h(n) seront tous nuls pour n>N
- RII : Il y aura toujours des h(n) non nuls. Pour qu'un RII soit stable il faut que les pôles de la fonction de transfert soient à l'intérieur du cercle unité.

Méthode :

on pose x(n)=δ(n) → y(n)=h(n) et on regarde ce que devient h(n) qd n→+∞ [on prend n=0,1,2 ...]

Recherche de la fonction de transfert :

y(n)=x(n)+a y(n-1)

–TZ→ Y(z)=X(Z)+az⁻¹Y(z)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-a.z^{-1}}$$

la réponse impulsionnelle h(n)=TZ⁻¹[H(z)]

Rappels sur les PROBABILITES

Variables aléatoires réelles :

Définition : Une v. a réelle X est une application mesurable de (Ω,A,P) dans (ℜ,B), c a d une application telle que l'image réciproque par X de tout élt de B < à A :

∀I ∈ B, {ω|X(ω)∈I} ∈ A

Fonction de répartition

$$F_X : \Re \to [0,1]$$
$$t \mapsto F_X(t) = P_X(]-\infty,t[) = P(X<t)$$

Densité de probabilité : une variable aléatoire X de fonction de répartition F_x est **à densité** (ou **absolument continue**) s'il existe une fonction f telle que :

$$\forall t \in \Re, F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

f est la densité de probabilité

Théorème :

fX(x) est une densité de probabilité ssi :

$$\begin{cases} f_X(x) \geq 0, \forall x \\ \int_R f_X(x) = 1 \end{cases}$$

Espérance mathématique :

E[X] : moment d'ordre 1 (moyenne) ⇔ espérance

v. a discrète : $E[X] = \sum_{i \in I} x_i P[X = x_i]$

v. a continue : $E[X] = \int_R x.f_X(x)dx$

I est l'ensemble des valeurs que peut prendre X

Variance :

La variance = Var(X) = σ^2 est le moment centré d'ordre 2

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

L'**écart-type** est la racine carré de la variance

Quelques propriétés :

- Linéarité : E[aX+bY]=a.E[X]+b.E[Y]
- E[a]=a et E[X+a]=E[X]+a
- Var(x)>=0 ; Var(a.X)=a².Var(x) ; Var(a+X)=Var(X)

Théorème du transfert :

v. a discrète : $E[g(X)] = \sum_i g(x_i).P[X = x_i]$

v. a continue : $E[g(X)] = \int_R g(x).f_X(x)dx$

Définitions :

- v. a **centrée** : sa moyenne est nulle → E[X]=0
- v. a **réduite** : sa variance est égale à 1 → E[(X-E[X])²]=1

Loi de Poisson

X suit une loi de Poisson de paramètre λ (λ>0) ssi :

$$\forall k \in N, P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e$$

E[X]=λ et Var(X)= λ

Loi uniforme

Une v. a X est uniformément répartie sur l'intervalle [a,b] (a et b réels tels que a < b) si la densité de probabilité à pour expression :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1\!1_{[a,b]}(x)$$

E[X]=(a+b)/2 et Var(X)=(b-a)²/12

Loi normale (v. a gaussienne)

Une v. a X est une v. a normale (ou gaussienne) de paramètres μ_x et σ^2_x si sa densité de probabilité a pour expression :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

E[X]= μ_x et Var[X]= σ^2_x

On dit que X → N(μ_x, σ^2_x)

Propriétés : Si X → N(μ_x, σ^2_x), Y=a.X+b ∈ N(a.μ_x+b, a².σ^2_x)

Loi exponentielle

Une v. a X est une v. a exponentielle de paramètre λ si la densité de probabilité a pour expression :

$$f_X(x) = \lambda.e^{-\lambda.x}.1\!1_{[0,+\infty[}$$

E[X]=1/λ et Var(X)=1/λ²

Couples et vecteurs aléatoires

Fct de répartition du couple (X,Y) :

$$F_{X,Y}(x,y) = P_{X,Y}(]-\infty,x[\times]-\infty,y[) = \iint_R f_{X,Y}(x,y).dx.d$$

Densité de probabilité :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{d^2 F_{X,Y}(x,y)}{dx.dy}$$

Lois marginales : On appelle lois marginales du couple (X,Y) les lois de X et de Y, P_x et P_Y :

cas continu — cas discret

fonction de répartition

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) \qquad P_X(i) = \sum_j P_{X,Y}(i,j)$$

densité de probabilité

$$f_X(x) = \int_{\Re} f_{X,Y}(x,y).dy$$

Probabilité conditionnelle :

$$P_{X/Y}(X \in A / Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

Indépendance de 2 v. a si pour un intervalle A et B inclus dans $\Re$ on a :
$P\{X \in A, X \in B\} = P\{X \in A\}.P\{X \in B\}$

cas continu	cas discret
$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$	$P_{X,Y}\{(i,j)\} = P_X\{i\}.P_Y\{j\} \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$

dans ce cas $P_{X/Y} = P_X$

Processus Stochastiques

$X(\omega,t)$: ω : aléatoire
t : temps

à t fixé, $t=t_0$, $X(\omega,t_0)$ est une *variable aléatoire*
à ω fixé, $w=w_0$, $X(\omega_0,t)$ est *une trajectoire (un signal déterministe)*

La stationnarité :

- au sens strict : la loi ne dépend pas de l'origine des temps
- au sens large [stationnaire du 2nd ordre] : ***3 conditions*** :
  1. E[X(t)] ne dépend pas du temps
  2. E[X(t).X(t-τ)] ne dépend pas de τ = $C_x(\tau)$
     (ou E[X(t).X(t')] ne dépend que de t-t'= $C_x(t-t')$)
  3. E[|X(t)|2] = $C_x(0) < +\infty$

ergodicité :

- au sens strict : tous les moments temporels ne dépendent pas du tirage
- au sens large : les moments jusqu'à l'ordre n ne dépendent pas du tirage

Fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire du 2nd ordre :

$$C_X(\tau) = \langle X(t), X(t-\tau) = E[X(t).X(t-\tau)]$$

Covariance :

$$\mathrm{cov}_X(t,t-\tau) = C_X(\tau) = E[X(t).X^*(t-\tau)] - E[X(t)].E[X(t-\tau)]$$

dans le cas où E[X(t)] est une cste du temps → E[X(t)]=m, alors $\mathrm{cov}_X(t,t-\tau) = C_X(t) - m^2$

Quelques propriétés :

- $C_x(0)$ est la puissance moyenne du signal = $E[|X(t)|^2]$
- $C_x(0) > C_x(\tau)$ pour tout $\tau \neq 0$
- Si X(t) réel alors $C_x(\tau)$ est une fonction réelle et paire
- La matrice de covariance d'un processus stationnaire du 2nd ordre est une matrice de Toeplitz

Signaux déterministes

- Signaux à énergie finie :

$$< x(t), y(t) >= \int_{\Re} x(t).y^*(t)dt$$

- Signaux à puissance moyenne finie :

$$< x(t), y(t) >= \lim_{L \to +\infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t).y^*(t)dt$$

- Processus aléatoires :

$$< X(t), Y(t) >= E[X(t), Y^*(t)]$$

Etude Spectrale

Densité spectrale de puissance (cf. A21) :

$$S_X(f) = TF[C_X(\tau)] \qquad \textit{en continu}$$

$$S_X(f) = TZ[C_X(\tau)] \qquad \textit{en discret}$$

- Processus à temps continu :

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\tau).e^{-j2\pi f\tau}d\tau = TF^{-1}[S_X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f).e^{+2j\pi ft}df$$

- Processus à temps discret :

$$S_X(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_X(k).e^{-2j\pi fk} \qquad C_X(k) = TZ^{-1}[S_X(z)]$$
$$= \langle X(n), X(n-k) \rangle$$
$$= E[X(n).X^*(n-k)]$$

Attention → $z = e^{2j\pi f}$

Puissance d'un processus aléatoire :

$$P = C_X(0)$$

- Processus à temps continu : $P = C_X(0) = \int_{\Re} S_X(f)df$
- Processus à temps discret : $P = \frac{1}{2\pi j} \oint S_X(z)\frac{dz}{z} = \sum Rés(\frac{S_X(z)}{z})$

Propriétés des processus aléatoires du 2nd ordre :
[valable dans le cas continu et discret]

cas où X(t) est un processus réel :

- $C_x(\tau) = C_x(-\tau)$
- fonction d'**autocorrélation** est une fonction **paire**
- la DSP ($S_x(f)$) est une fonction **réelle et paire**

cas où X(t) est un processus complexe :

- $C_x(\tau) = C^*_x(-\tau)$
- fonction d'**autocorrélation** est une fonction **à symétrie hermitienne**
- la DSP est une fonction **réelle**

maximum de la fonction d'autocorrélation :

- Elle atteint son maximum à l'origine

Le BRUIT BLANC

Le bruit blanc est un *processus aléatoire stationnaire du second ordre*, ***centré*** et dont la densité spectrale de puissance est ***constante*** sur tout l'axe des fréquences.

Bruit blanc à temps continu :

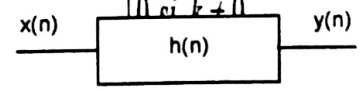
$$S_B(f) = cste = \frac{N_0}{2} \quad \forall f \qquad C_B(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Bruit blanc à temps discret :

$$S_B(f) = cste = \frac{N_0}{2} \quad 1/2 \leq f \leq 1/2 \qquad C_B(k) = \frac{N_0}{2}\delta_{k,0}$$

où $\delta_{k,0}$ est le symbole de Kronecker : $\begin{cases} 1 \text{ si } k=0 \\ 0 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$

Filtrage des Processus aléatoire



y(t)=h(t)*x(t)

Continu	Discret
Y(f)=H(f).X(f)	Y(z)=H(z).X(z)

continu et discret (z=n)

$$S_Y(f) = S_X(f).H(f).H^*(f) \qquad S_Y(z) = S_X(z).H(z).H(z^{-1})$$