Codage de la parole - Correction de la partie de l'examen du Vendredi 2 Novembre 2012 de l'UV signal et communication portant sur les signaux aléatoires.

<u>Synthèse de la parole</u> : on filtre un bruit blanc discret stationnaire $b(n)$, centré, de variance σ^2, au moyen d'un filtre linéaire récursif du 2ème ordre (voir figure 1), c'est à dire que le signal de sortie à l'instant n ($x(n)$) s'écrit en fonction du bruit à l'entrée $b(n)$ et des échantillons de sortie aux deux instants précédents $x(n-1)$ et $x(n-2)$.

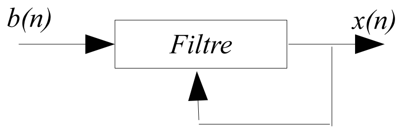

Figure 1 – Synthèse de la parole

Nous avons donc $x(n) = b(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2)$.

1. Déterminer la fonction de transfert du filtre en z

   Par transformée en z de la formule de filtrage :

   $$X(z) = B(z) - a_1 X(z) z^{-1} - a_2 X(z) z^{-2} \tag{1}$$

   On en déduit alors rapidement :

   $$H(z) = \frac{X(z)}{B(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}. \tag{2}$$

2. Que dire de sa stabilité ? En particulier que se passe-t-il si $1 + a_1 + a_2 = 0$?

   C'est un filtre récursif, de réponse impulsionnelle infinie. Il n'est *a priori* pas possible de conclure sur sa stabilité. Il faudrait pour celà déterminer ses pôles (valeurs de z telles que $1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 0$).
   Dans le cas où $1 + a1 + a2 = 0$, nous constatons immédiatement que $z = 1$ est un pôle de la fonction de transfert. Le filtre n'est donc pas stable.

Filtrage d'un bruit blanc.

1. Expliquez pourquoi $x(n)$ et $b(n)$ ne sont pas indépendants mais pourquoi $x(n-i)$ et $b(n)$ avec $1 \leq i \leq n$ le sont.

   Ceci est directement lié à la causalité du filtre. La sortie à l'instant n ($x(n)$) dépend de l'entrée à l'instant n ($b(n)$) tandis que la sortie à un instant précédent $n - i$ avec $i \geq 1$ ne dépend évidemment pas d'un entrée qui n'est pas encore arrivée !

2. Montrez que la variable aléatoire $x(n)$ est centrée quel que soit n.

   Nous allons pour cela considérer que le filtre est stable. Donc $1 + a1 + a2 \neq 0$. De plus le bruit en entrée du filtre et stationnaire du second ordre. Le filtre étant stable, la sortie le sera aussi. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x(n)] &= \mathbb{E}[b(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2)] \\ &= \mathbb{E}[b(n)] - a_1\mathbb{E}[x(n-1)] - a_2\mathbb{E}[x(n-2)] \\ &\quad \text{par linéarité} \\ &= \mathbb{E}[b(n)] - a_1\mathbb{E}[x(n)] - a_2\mathbb{E}[x(n)] \\ &\quad \text{car } x(n) \text{ stationnaire du second ordre.}\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}(1 + a_1 + a_2)\mathbb{E}[x(n)] &= \mathbb{E}[b(n)] = 0 \\ &\quad \text{car } b(n) \text{ centré}\end{aligned}$$

   D'après l'hypothèse de stabilité du filtre, $1 + a_1 + a_2 \neq 0$ donc $\mathbb{E}[x(n)] = 0$.

3. Exprimez $C_x(1)$ en fonction de $C_x(0)$.

$$\begin{aligned}C_x(1) &= \mathbb{E}[x(n)x(n-1)] \\ &= \mathbb{E}[(b(n) - a_1x(n-1) - a_2x(n-2))\, x(n-1)] \\ &= \mathbb{E}[b(n)x(n-1)] - a_1\mathbb{E}[x(n-1)x(n-1)] - a_2\mathbb{E}[x(n-2)x(n-1)] \\ &= \mathbb{E}[b(n)]\mathbb{E}[x(n-1)] - a_1C_x(0) - a_2C_x(1) \\ &\quad \text{car } b(n) \text{ et } x(n-1) \text{ indépendants (vu dans une question précédente).} \\ &= 0 - a_1C_x(0) - a_2C_x(1).\end{aligned}$$

   Finalement,

$$C_x(1) = -\frac{a_1}{1 + a_2}C_x(0). \tag{3}$$

4. Que concluez sur la propriété de " blancheur " quand le bruit traverse le filtre.

   Sauf si $a_1 = 0$, ce qui ne présente pas vraiment d'intérêt, la sortie du filtre est corrélée ($C_x(1) \neq 0$) ce qui signifie qu'elle n'est pas "blanche" (son spectre ne sera pas *plat*).

<u>La prédiction linéaire</u> : soit $x(n)$ un signal aléatoire, stationnaire du second ordre. On effectue une prédiction linéaire de $x(n)$. Soit a_i le $i^{\text{ème}}$ coefficient de prédiction linéaire. L'objectif est d'estimer l'échantillon à l'instant n en fonctions des échantillons aux instants précédents. L'ordre de la prédiction est le nombre d'échantillons utilisés pour estimer le nouvel échantillon. Nous pouvons écrire

$$\hat{x}(n) = -\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i).$$

L'objectif du codage de la parole est, à partir d'une trame de 20 ms de parole d'estimer les coefficients de la prédictions linéaire. Le cas d'une prédiction à l'ordre 2 est illustré sur la figure 2.

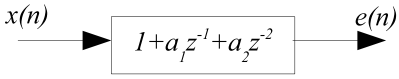

FIGURE 2 – Filtre de prédiction linéaire

1. Montrez que la sortie du filtre est $e(n) = x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)$ et que c'est l'erreur commise par la prédiction linéaire.

   Nous avons la fonction de transfert du filtre : $H(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}\frac{E(z)}{X(z)} =& 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \\ & \Rightarrow E(z) = X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z) \\ & \Rightarrow e(n) = x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) \\ & \qquad \text{Par transformée en } z \text{ inverse} \\ & \Rightarrow e(n) = x(n) - \left(- \sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i) \right) \\ & \Rightarrow e(n) = x(n) - \hat{x}(n)\end{aligned}$$

   La sortie du filtre est donc bien l'erreur de la prédiction linéaire (la différence entre la valeur réelle $x(n)$ et la valeur estimée $\hat{x}(n)$.

Nous allons estimer les coefficients a_1 et a_2 par la méthode de minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE).

2. Déterminez l'erreur quadratique moyenne $\mathbb{E}[e(n)^2]$ en fonction de a_1, a_2 et la fonction d'autocorrélation de $x(n)$, $C_x(k)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e(n)^2] &= \mathbb{E}[(x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)))^2] \\ &= \mathbb{E}[x(n)^2 + a_1^2 x(n-1)^2 + a_2^2 x(n-2)^2 + 2a_1 x(n-1)x(n) \\ &\qquad + 2a_2 x(n-2)x(n) + 2a_1 a_2 x(n-1)x(n-2)] \\ &= \mathbb{E}[x(n)^2] + a_1^2 \mathbb{E}[x(n-1)^2] + a_2^2 \mathbb{E}[x(n-2)^2] + 2a_1 \mathbb{E}[x(n-1)x(n)] \\ &\qquad + 2a_2 \mathbb{E}[x(n-2)x(n)] + 2a_1 a_2 \mathbb{E}[x(n-1)x(n-2)] \\ &= C_x(0) + a_1^2 C_x(0) + a_2^2 C_x(0) + 2a_1 C_x(1) + 2a_2 C_x(2) + 2a_1 a_2 C_x(1) \\ &= (1 + a_1^2 + a_2^2) C_x(0) + 2a_1(1 + a_2) C_x(1) + 2a_2 C_x(2)\end{aligned}$$

Questions supplémentaires si vous avez du temps...

3. Pour trouver le minimum il faut annuler les dérivées de $\mathbb{E}[e(n)^2]$ par rapport à a_1 et a_2. Calculez les dérivées et donnez les équations obtenues.

$$\left\{\begin{array}{lllll} \frac{\partial \mathbb{E}[e(n)^2]}{\partial a_1} & = & 2a_1C_x(0)+2(1+a_2)C_x(1) & = & 0 \quad (a) \\ \frac{\partial \mathbb{E}[e(n)^2]}{\partial a_2} & = & 2a_2C_x(0)+2a_1C_x(1)+2C_x(2) & = & 0 \quad (b) \end{array}\right.$$

4. Résolvez le système et trouvez a_1 et a_2.

   L'équation (a) donne :

$$a_1 = -(1+a_2)\frac{C_x(1)}{C_x(0)}$$

   En remplaçant a_1 par cette valeur dans (b), on obtient :

$$\begin{aligned} a_2C_x(0)-(1+a_2)\frac{C_x(1)}{C_x(0)}C_x(1)+C_x(2)=0 \\ \Rightarrow a_2\left(C_x(0)-\frac{C_x(1)^2}{C_x(0)}\right) = \frac{C_x(1)^2}{C_x(0)} - C_x(2) \\ \Rightarrow a_2 = \frac{C_x(1)^2-C_x(2)C_x(0)}{C_x(0)^2-C_x(1)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

   On peut alors revenir à la valeur de a_1 :

$$\begin{aligned} a_1 = -(1+\frac{C_x(1)^2-C_x(2)C_x(0)}{C_x(0)^2-C_x(1)^2})\frac{C_x(1)}{C_x(0)} \\ \Rightarrow a_1 = -(\frac{C_x(0)^2-C_x(2)C_x(0)}{C_x(0)^2-C_x(1)^2})\frac{C_x(1)}{C_x(0)} \\ \Rightarrow a_1 = \frac{C_x(1)C_x(2)-C_x(1)C_x(0)}{C_x(0)^2-C_x(1)^2} \end{aligned}$$

   Nous pouvons donc déterminer assez simplement les coefficients du modèle de prédiction linéaire à partir de la fonction d'autocorrélation du signal étudié.