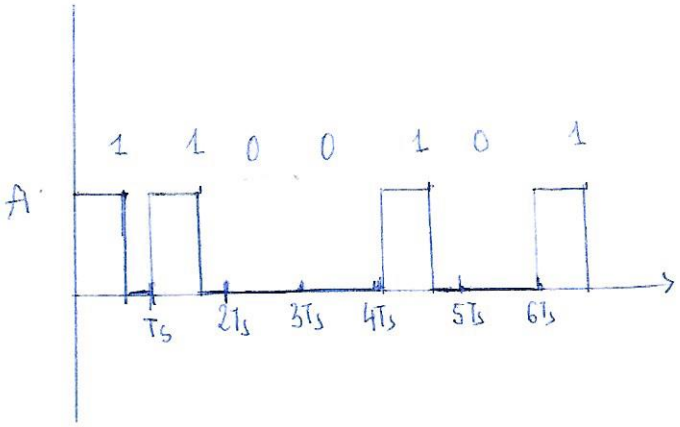
Exercice 6.1

Soit $T_s' < T_s$; $\mathcal{M} = \{0, A\}$; $h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_s'/2}{T_s'}\right)$

$a_k \in \mathcal{M}$

Trajectoire :



Densité Spectrale de Puissance

Formule de BENNETT (formule 4.20 du cours)

$$S(f) = \frac{1}{T_s} \| H(f) \|^2 S_a(e^{j2\pi f}) + \frac{\| m_d \|^2}{T_s^2} \sum_n \| H(n/T_s) \|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$H(f) = TF[h(t)]$

$S_a^c(e^{j2\pi f})$ = Transformée de Fourier de la ~~séquence aléatoire~~ fonction d'autocorrélation discrète $R_a^c(n)$ de la séquence des symboles centrée a_k^c

$$S_a(e^{j2\pi f}) = \sum_n R_a^c(n) e^{-j2\pi f n T_s}$$

m_d = moyenne statistique de la séquence discrète aléatoire $\{d_k\}$

NB Cette séquence est supposée stationnaire au sens large.

$\{d_k\} \to \{a_k\}$

$m_d = E[a_k] = \frac{A}{2} \quad \forall k$

Soit $a_k = a_k^c + m_d$ $\quad$ $\{a_k^c\}$ est la séquence centrée

$a_k^c \in \left\{-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right\}$

$$R_{a^c}(n) = E\left[a^c_k \, a^c_{k-n}\right]$$

$$= \frac{A^2}{4} \rightarrow n=0$$

$$= 0 \rightarrow \text{ailleurs.}$$

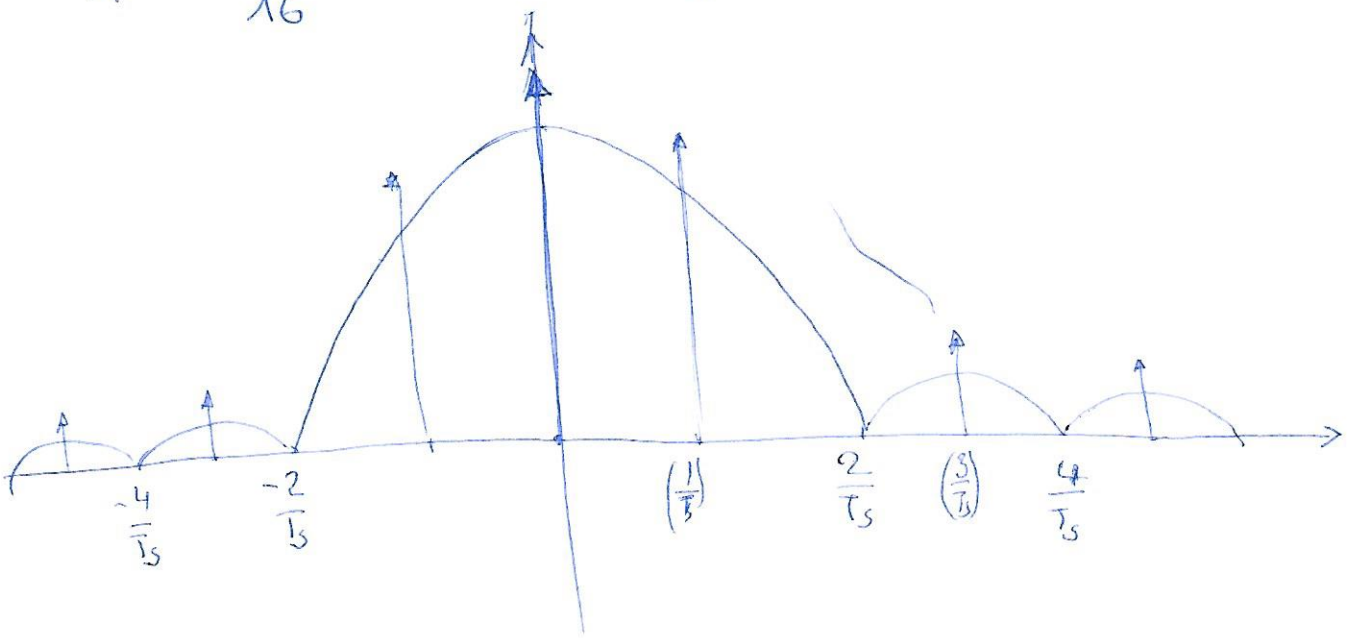
$$\Rightarrow S_{a^c}(e^{j2\pi f}) = \frac{A^2}{4} \quad \forall f.$$

$$H(f) = T'_s \, \mathrm{sinc}(f T'_s)$$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{T'^2_s}{T_s} \mathrm{sinc}^2(f T'_s) \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4 T_s^2} T'^2_s \sum_n \mathrm{sinc}^2\left(\frac{n T'_s}{T_s}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

En prenant $T'_s = \frac{T_s}{2}$

$$S(f) = \frac{A^2 T_s}{16} \mathrm{sinc}^2\left(f \frac{T_s}{2}\right) + \frac{A^2}{16} \sum_n \mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$



Spectre continue + spectre de raies.

(L'amplitude des raies % à celle du spectre continu dépend du facteur T_s). On peut tracer $S(f)$ en fonction de "fT_s" $\Rightarrow$ les amplitudes coïncideront.

- Débit binaire = 22 Kbits/s.

=> Débit symbole : 22 Ksym/s ($m = 1$ ou $M = 2$)

$$\frac{1}{T_s} = 22 \text{ Ksym/s}.$$

=> 1er lobe à 44 KHz

Bande du canal nécessaire = 44 KHz

Exercice 6.2

$$\mathcal{M} = \{-3A, -A, +A, +3A\}$$

$$H(f) = \text{rect}(fT_s)$$

Densité spectrale de puissance :

$$m_d = E[a_k] = 0 \quad \forall k.$$

Pas de valeur moyenne (centré)

=> pas de raies spectrales.

$$S(f) = \frac{\|H(f)\|^2}{T_s} \times S_d(e^{j2\pi f})$$

$$\|H(f)\|^2 = \text{rect}(fT_s)$$

$$S_d(e^{j2\pi f}) = \sum_n R_d(n) e^{-j2\pi f n T_s}$$

$$R_d(n) = E[a_k a_{k-n}]$$

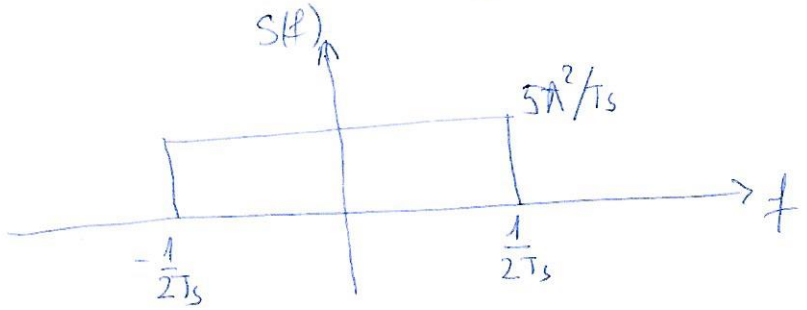
Pour $n = 0$ $R_d(0) = \left(9 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4}\right) A^2$

$$= 5A^2$$

$n \neq 0$ $R_d(n) = 0$ (suite de symbols indépendants)

$$S_d(e^{j2\pi f}) = 5A^2 \quad \forall f$$

$$S(f) = \mathrm{rect}(fT_s) \times \frac{5A^2}{T_s}$$



. Séquence binaire 64 Kbits/s.

$D_b = 64$ Kbits/s.

$$\frac{1}{T_s} = D_s = \frac{D_b}{\log_2 M} = \frac{D_b}{m} = \frac{64\,10^3}{2} = 32\,10^3 \text{ Ksym/s}.$$

$\Rightarrow \frac{1}{2T_s} = 16.10^3$ KHz est la bande de canal minimale pour la transmission de ce signal.

<u>Exercice 6.3</u>. MIA à mémoire

Soit $b_k = \frac{1}{2}\{a_k + a_{k-1}\}$.

La séquence des symbols est b_k.

$m_d = E[b_k] = 0 \quad \forall k$

Pas de raies spectrale.

$$S(f) = \frac{\|H(f)\|^2}{T_s} \cdot S_d(e^{j2\pi f})$$

avec $S_d(e^{j2\pi f}) = \sum_n R_b(n) e^{-j2\pi f n T_s}$

Calcul de $R_b(n)$

$$R_b(0) = E\left[\|b_k\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{4} E\left[\|a_k + a_{k-1}\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(E[a_k^2] + E[a_{k-1}^2]\right)$$

<u>Rappel</u> : La séquence des symbols est stationnaire au sens large.

$$\Rightarrow R_b(0) = \frac{1}{4}\left(5A^2 + 5A^2\right) = \frac{5A^2}{2}$$

$$R_b(1) = E[b_k b_{k-1}] = \frac{1}{4} E\left[(a_k + a_{k-1})(a_{k-1} + a_{k-2})\right]$$

$$= \frac{1}{4} E[a_{k-1}^2] \quad \text{car } \{a_k\} \text{ indépendants.}$$

$$= \frac{5A^2}{4}$$

$$R_b(-1) = \frac{5A^2}{4}$$

$$R_b(n) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

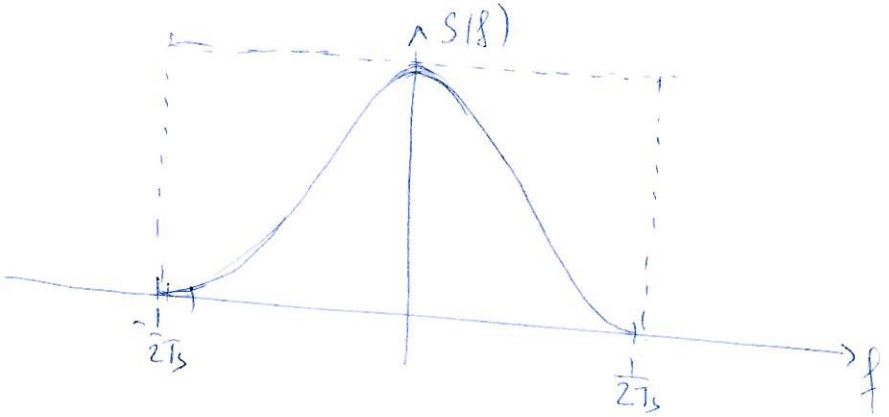
$$\Rightarrow S_b(e^{j2\pi f}) = \frac{5A^2}{2} + \frac{5A^2}{4} e^{-j2\pi f T_s} + \frac{5A^2}{4} e^{j2\pi f T_s}$$

$$= \frac{5A^2}{2}\left(1 + \frac{e^{j2\pi f T_s} + e^{-j2\pi f T_s}}{2}\right)$$

$$= \frac{5A^2}{2}\left(1 + \cos(2\pi f T_s)\right)$$

$$= 5A^2 \cos^2(\pi f T_s)$$

$$S(f) = \frac{5A^2}{T_s} \cos^2(\pi f T_s) \times \mathrm{rect}(f T_s)$$



L'information est d'avantage confinée dans une bande plus étroite. Si on considère la bande avec 95% d'énergie par exemple ... Ou si on limite la bande à -20dB, l'énergie du signal est confinée dans une bande plus petite. En réception → des algorithms spécifiques pour absorber cette mémoire : Pas de décision symbole / par symbole !

Exercice 6.4 .

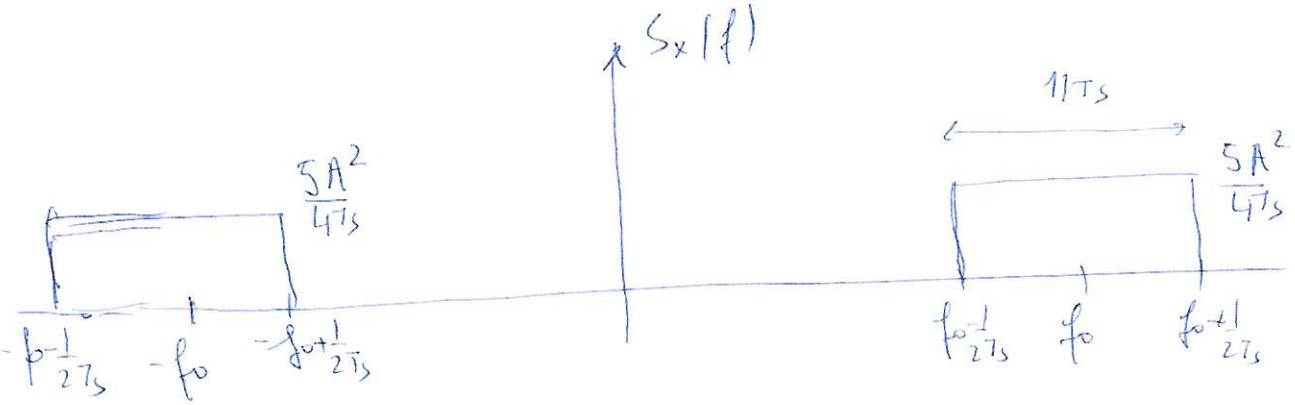
- $\mathcal{M} = \{-3A, -A, +A, +3A\}$.
- $H(f) = \mathrm{rect}(fT_s)$

$\Rightarrow s(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$, $a_k \in \mathcal{M}$

Modulation ASK .

1) $x(t) = s(t)\cos(2\pi f_0 t)$
$= \sum a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t)$

2) $S_x(f) = \frac{1}{4}\left(S_s(f - f_0) + S_s(-f - f_0)\right)$
$= \frac{5}{4}\frac{A^2}{T_s}\left(\mathrm{rect}((f - f_0)T_s) + \mathrm{rect}((-f - f_0)T_s)\right)$



- Soit la séquence binaire avec D_b = 64 Kbits/sec

$$D_s = \frac{D_b}{\log(M)} = \frac{D_b}{2} = 32 \text{ Kbym/s}.$$

Bande du signal $= \frac{1}{T_s} = D_s = \underline{\underline{32 \text{ KHz}}}$.

Bande minimale du canal $= 32$ KHz.

<u>Exercice 6.5</u>.

$a_k \in \mathcal{M}$ $\qquad a(t) = \sum a_k h(t-kT_s)$

$b_k \in \mathcal{M}$ $\qquad b(t) = \sum b_k h(t-kT_s)$

$$x(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t) - b(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$a(t)$ et $b(t)$ modulent les amplitudes de $\cos(2\pi f_0 t)$ et $\sin(2\pi f_0 t)$ respectivement

Ces deux signaux porteurs ($\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$) sont bien en quadrature (déphasés de $\frac{\pi}{2}$).

<u>2e expression</u>. a_k et $b_k \Rightarrow d_k = a_k + jb_k$.

$$d_k = a_k + j b_k$$
$$= \rho_k e^{j\varphi_k}$$

$$\rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$
$$\varphi_k = \mathrm{Arg}\{d_k\} = \mathrm{Atang}\,\frac{b_k}{a_k}$$

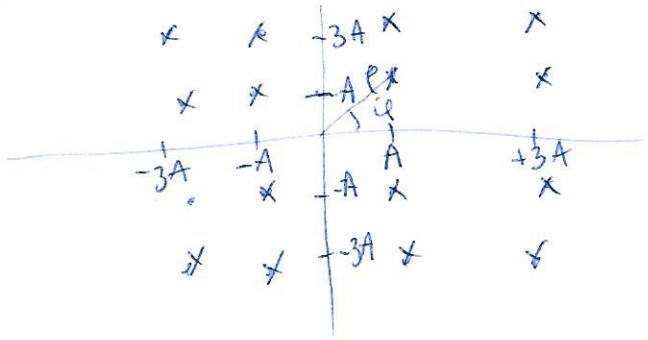
$$s(t) = a(t) + j\,b(t)$$
$$= \sum_k d_k\, h(t - kT_s)$$
$$= \sum_k \rho_k e^{j\varphi_k} h(t - kT_s)$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathrm{Re}\left\{ s(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{ \sum \rho_k e^{j\varphi_k} h(t - kT_s)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$
$$= \underline{\sum_k \rho_k\, h(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_k)}$$

($h(t)$ est un filtre réel).

d'après cette expression apparait la modulation d'amplitude du signal porteur par ρ_k et de sa phase par $\underline{\varphi_k}$ $\Rightarrow$ QAM est une modulation d'amplitude et de phase.

$kT_s \leq t \leq (k+1)T_s \Leftarrow$



Densité spectrale de puissance (DSP)

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ s(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}.$$

$s(t)$ est l'enveloppe complexe.

Soit $S_s(f)$ est la DSP de cette enveloppe complexe.

alors $S_x(f) = \frac{1}{4}\left(S_s(f-f_0) + S_s(-f-f_0) \right)$.

Donc il faut calculer $S_s(f)$ ~~$= \frac{S_d(e^{j2\pi f})}{T_s} \|H(f)\|^2$~~ 4

$$s(t) = \sum d_k\, h(t - kT_s)$$

$d_k \in \mathcal{M}^2$ = constellation de la 16QAM

$h(t)$ est tel que $H(f) = \mathrm{rect}(fT_s)$

$\Rightarrow$ ~~$S_s(f) =$~~ $m_d = E[d_k] = 0 \quad \forall k$

Pas de raies. $\Rightarrow S_s(f) = \dfrac{S_d(e^{j2\pi f})\, \|H(f)\|^2}{T_s}$.

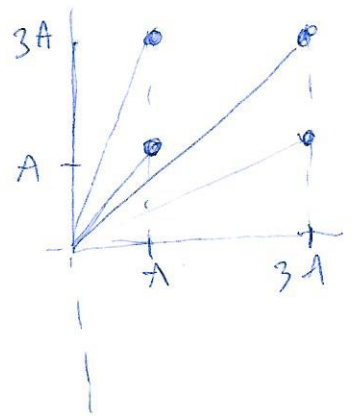
$R_d(n) = E[d_k d_{k-n}^*]$

(symboles sont indépendants $\rightarrow R_d(n) = 0 \quad n \neq 0$

$$R_d(0) = E[\|d_k\|^2] = \frac{4}{16}\left[(A^2+A^2) + 2(A^2+9A^2) + (9A^2+9A^2) \right]$$

$\frac{4}{16} \rightarrow$ 4 cadrans

$\frac{4}{16} \rightarrow \frac{1}{16} = P_r\{d_k\}$

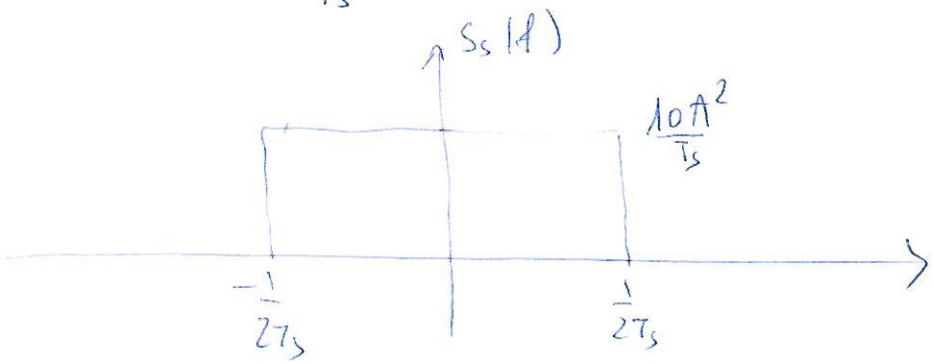


$$= \frac{1}{4}\left[2A^2 + 20A^2 + 18A^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4} 40A^2 = 10A^2$$

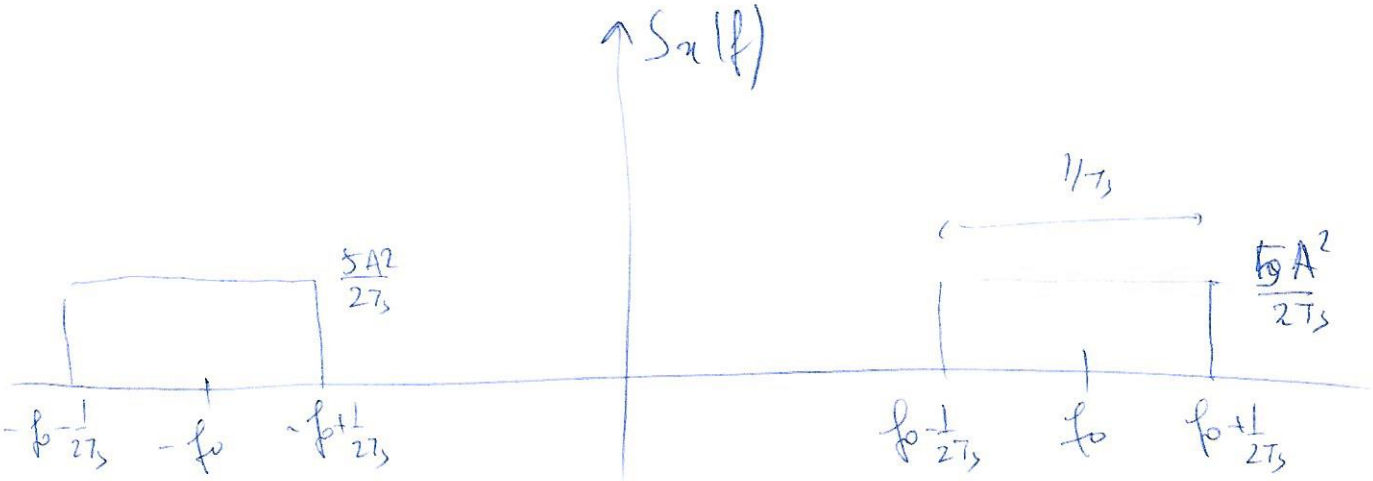
$$S_d(e^{j2\pi f}) = 10\,A^2 \quad \forall f.$$

$$\Rightarrow S_s(f) = \frac{10A^2}{T_s}\,\mathrm{rect}(fT_s)$$



Maintenant $S_x(f) = \frac{1}{4}\left(S_s(+f-f_0) + S_s(-f-f_0)\right)$

$$= \frac{10A^2}{4T_s}\left[\mathrm{rect}\left((f-f_0)T_s\right) + \mathrm{rect}\left((-f-f_0)T_s\right)\right]$$



- Soit $D_e = 64$ Kbits/s.

$$\frac{4}{4}\quad D_s = \frac{D_e}{\log_2 M} = \frac{D_e}{4} = \frac{64\,10^3}{4} = 16\,10^3 \text{ Ksym/s}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_s} = 16\,10^3 \text{ Ksym/s}.$$

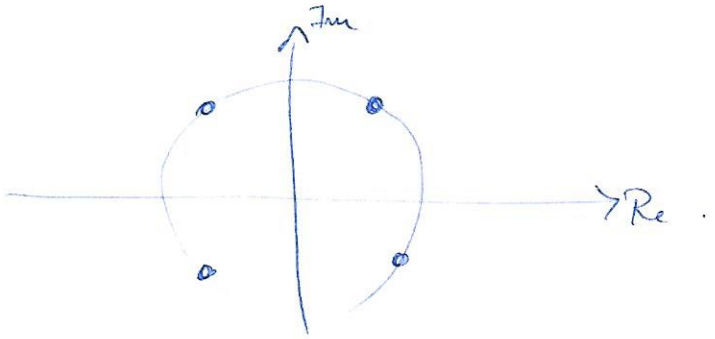
Bande du signal $= \frac{1}{T_s} = 16$ KHz $\Rightarrow$

Bande minimale du Canal $= 16$ KHz

Bande 16QAM < Bande 4ASK.

Exercice 6.6.

$$\mathcal{U} = \left\{ e^{j\pi/4},\ e^{j3\pi/4},\ e^{-j3\pi/4},\ e^{-j\pi/4} \right\}$$



$$h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ s(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}.$$

or $s(t) = \sum_k d_k\, h(t - kT_s)$

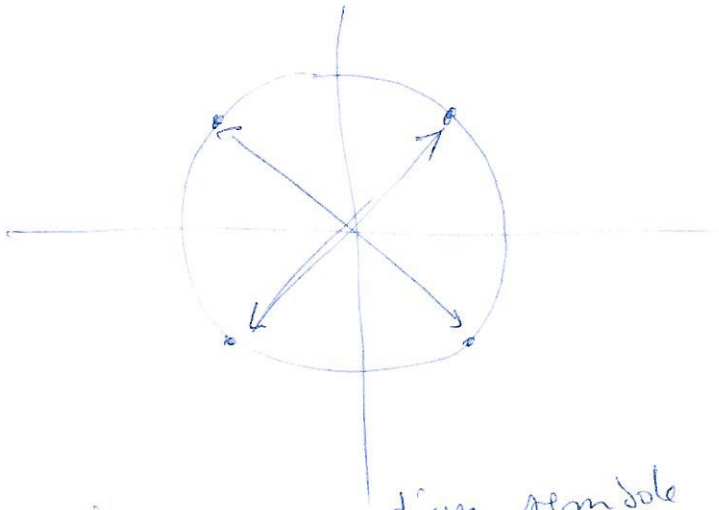
$d_k \in \mathcal{U}$ $\quad d_k = e^{j\varphi_k}$

$$s(t) = \sum e^{j\varphi_k} h(t - kT_s)$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(\sum e^{j\varphi_k} h(t - kT_s)\, e^{j2\pi f_0 t} \right)$$

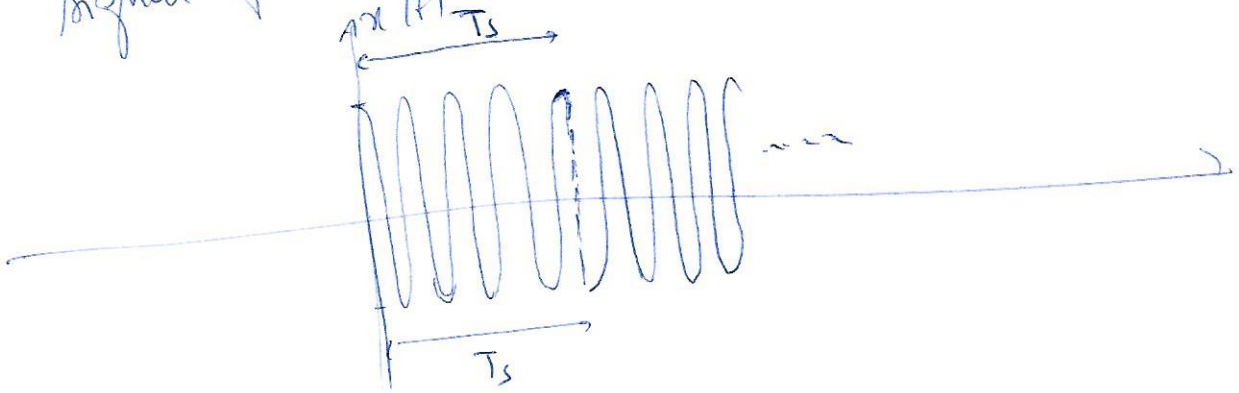
$$= \mathrm{Re}\left(\sum h(t - kT_s)\, e^{j2\pi f_0 t + \varphi_k} \right)$$

$$= \sum h(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_k)$$



lors d'un passage d'un symbole $e^{j\pi/4}$ au symbole $e^{-j3\pi/4}$, il y a un saut de π (et vice versa de $e^{-j3\pi/4} \rightarrow e^{j\pi/4}$). De même pour les passages de $e^{j3\pi/4} \leftrightarrow e^{-j\pi/4}$.

Les sauts de π font passer l'enveloppe du signal par zéro.



<u>Densité Spectrale</u>.

$$S_x(f) = \frac{1}{4}\left(S_s(f-f_0) + S_s(-f-f_0)\right).$$

$S_s(f) = ?$

$m_d = E[d_k] = 0$ Pas de raies.

$$S_s(f) = S_d(e^{j2\pi f}) \frac{\|H(f)\|^2}{T_s}$$

<u>Rappel</u>. $S_d(e^{j2\pi f}) = \sum_n R_d(n) e^{-j2\pi f n T_s}$

Symboles indépendants $\Rightarrow$ $R_d(n) = 0 \quad \forall n \neq 0$

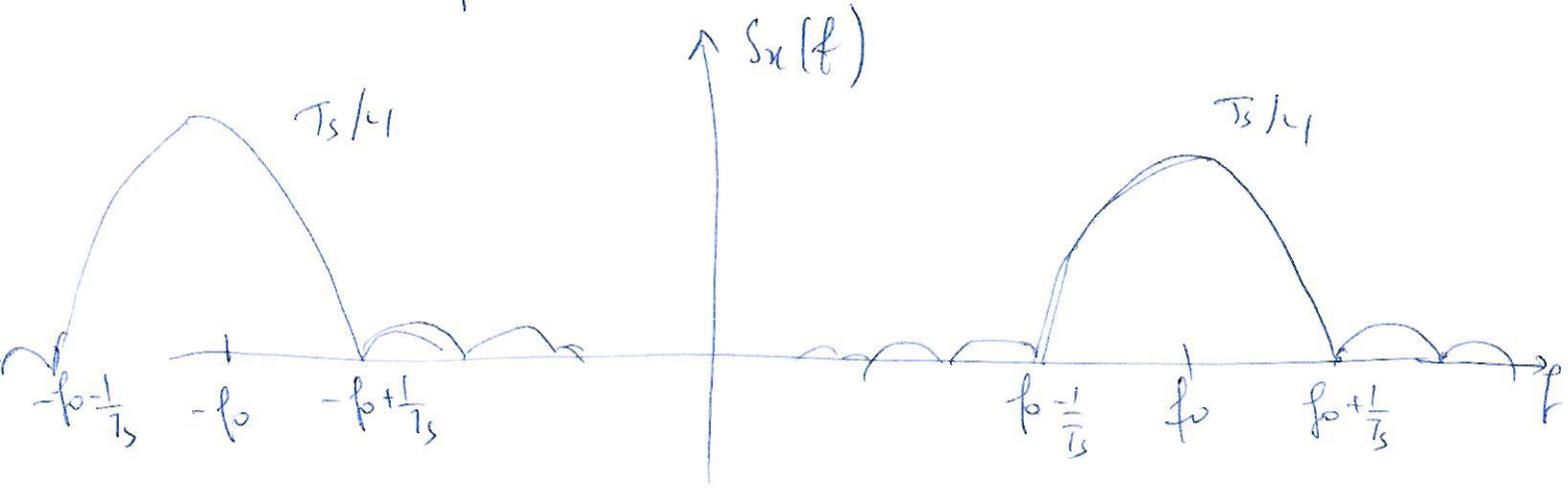
$R_d(0) = E[\|d_k\|^2] = 1 \quad \forall k$.

$\Rightarrow S_d(e^{j2\pi f}) = 1 \quad \forall f$.

$H(f) = T_s \operatorname{sinc}(f T_s)$

$\Rightarrow S_s(f) = T_s \operatorname{sinc}^2(f T_s)$

$$S_x(f) = \frac{T_s}{4}\left(\operatorname{sinc}^2((f-f_0)T_s) + \operatorname{sinc}^2((-f-f_0)T_s)\right)$$



<u>Exercice 6.7</u>.

Soit $\mathcal{M}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1+j, 1-j, -1+j, -1-j\}$.

$\mathcal{M}' = \mathcal{M}$

$\Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ avec $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-1, +1\}$.

Soit $a_k \in \mathcal{M}_1$, $b_k \in \mathcal{M}_2$ $\Rightarrow$ $\underline{d_k = a_k + j b_k}$

$$s(t) = \sum (a_k + j b_k) h(t - kT_s)$$
$$= \sum a_k h(t - kT_s) + j \sum b_k h(t - kT_s)$$

$$s(t) = a(t) + j\,b(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t) - b(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

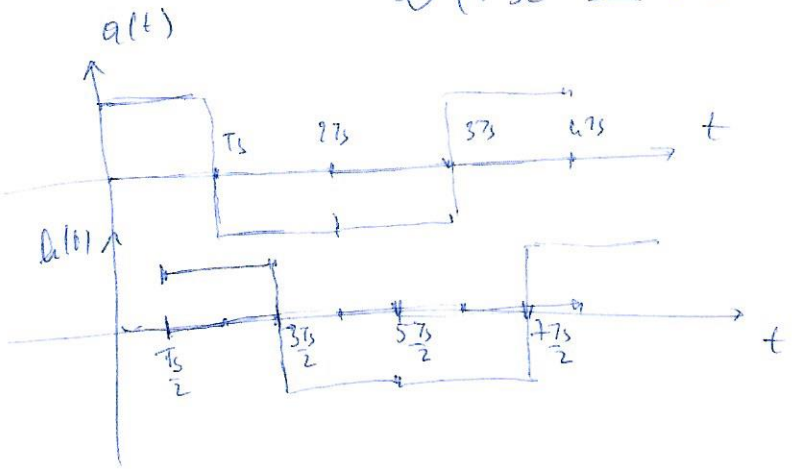
$$h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

Passage de l'enveloppe par zero ou saut de π $\rightarrow$ problème en présence d'amplificateurs NON linéaires.

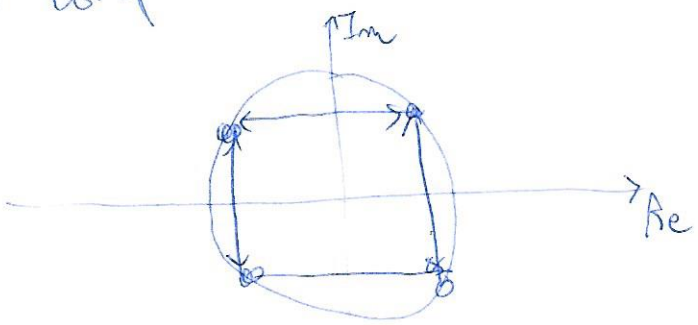
$\Rightarrow$ OQPSK.

$$a(t) = \sum a_k\, h(t - kT_s)$$

$$b(t) = \sum b_k\, h\left(t - kT_s - \frac{T_s}{2}\right)$$



Si on regarde tous les $\frac{T_s}{2}$, seul un symbole dans les 2 trains change $\Rightarrow$ Dans la constellation 1 seule composante est modifiée tous les $\frac{T_s}{2}$



Seuls les sauts de $\frac{\pi}{2}$ sont autorisés !

On peut considérer $s(t)$ sous la forme suivante :

$$d_{2k} = a_k$$

$$d_{2k+1} = j b_k$$

le filtre $g(t) = h(t)$ => de durée $\underline{\underline{T_s}}$

Mais il y a 1 symbole d_k <u>toutes les $\frac{T_s}{2}$</u>

(changement de symbole 2x plus).

Soit $s(t) = \sum_k d_k h(t - k\frac{T_s}{2})$

$$\Rightarrow s(t) = d_0 h(t) + d_1 h(t - \frac{T_s}{2}) + d_2 h(t - T_s) + d_3 h(t - \frac{3T_s}{2}) + d_4 h(t - 2T_s) + \dots$$

$$= a_0 h(t) + j b_0 h(t - \frac{T_s}{2}) + a_1 h(t - T_s) + j b_1 h(t - \frac{3T_s}{2})$$

* Comme les trains $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$ sont ... indépendants et décorrélés entre eux

$$R_d[n] = 0 \quad \forall n \neq 0$$

$$R_d(0) = E[\|d_k\|^2] = \begin{cases} = E[\|a_k\|^2] = \frac{1}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ = E[\|jb_k\|^2] = \frac{1}{2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

$$m_d = E[d_k] = 0 \quad \forall k.$$

$$S_s(f) = \frac{S_d(e^{j2\pi f})}{(T_s/2)} \|H(f)\|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{T_s^2 \operatorname{sinc}^2(fT_s)}{\frac{T_s}{2}} = T_s \operatorname{sinc}^2(fT_s)$$

$$S_s(f) = T_s \, \mathrm{sinc}^2(f T_s)$$

$$\Rightarrow S_a(f) = \frac{1}{4}\left(S_s(f-f_0) + S_s(-f-f_0)\right)$$

$$= \frac{T_s}{4}\left(\mathrm{sinc}^2((f-f_0)T_s) + \mathrm{sinc}^2((-f-f_0)T_s)\right)$$

$\Rightarrow$ Même DSP que la QPSK avec l'interdiction des sauts de phase de π.