Q.R.O.C module A22 **Année 2013/2014**

Matériel électronique non autorisé
Feuille A4 recto-verso de notes personnelles

Exercice I (10 points)

Dans le cadre de la synthèse de la parole, on filtre, à la réception, un bruit blanc discret stationnaire b(n), centré, de variance σ^2, au moyen d'un filtre linéaire récursif dont la relation liant le signal de sortie x(n) aux échantillons de bruit en entrée s'écrit:

$x(n) = -a_1 x(n-1) + b(n)$ avec a_1 réel et n>0. x est un processus aléatoire stationnaire au second ordre. On note Cx(k) la fonction d'autocorrélation de x.

1 Caractéristique du filtre

1.1 Déterminez la fonction de transfert $H(z)$ du filtre?

1.2 Montrez que ce résultat pouvait être obtenu à partir de la réponse impulsionnelle *h(n)* du filtre que vous calculerez. Pour quelles valeurs de a_1, le filtre est-il stable?

2 Caractéristiques du signal de sortie

2.1 Expliquez pourquoi x(n) et b(n) ne sont pas indépendants mais pourquoi x(n-k) et b(n) avec k>0 le sont.

2.2 Montrez que la variable x(n) est centrée.

2.3 Exprimez $C_x(0) = E(x(n)^2)$ en fonction de σ^2 puis $C_x(1) = E(x(n)x(n-1))$ en fonction de Cx(0) puis en fonction de σ^2 et a_1

2.4 Calculez $C_x(2) = E(x(n)x(n-2))$ en fonction de Cx(1) puis en fonction de σ^2 et a_1

2.5 En déduire Cx(k) en fonction de σ^2 et a_1

2.6 En déduire l'expression de la densité spectrale de x notée Sx(z). Représentez Sx(f) et préciserez les points importants sur les axes.

2.7 Retrouvez le résultat de 2.5 à partir de la formule du filtrage dans le domaine temporel $C_x(k) = C_b(k) * h(k) * h(-k)$.

Exercice II (6 points)

Soit un filtre de fonction de transfert $H(f) = rect(\frac{f - f_0}{\Delta f}) + rect(\frac{f + f_0}{\Delta f})$. On applique à l'entrée de ce filtre un processus aléatoire défini par :
$X(t,\omega) = S(t,\omega) + b(t,\omega) = A\sin(2\pi f_0 t + \theta(\omega)) + b(t,\omega)$ avec θ une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0,2\pi]$ et $b(t,\omega)$ un bruit gaussien centré de variance σ^2 et de densité spectrale No/2. On rappelle que le bruit gaussien est un processus ergodique.

2.1 $X(t,\omega)$ est-il stationnaire au 2^{nd} ordre ? Justifiez.

2.2 Le signal $Y(t,\omega) = S'(t,\omega) + b'(t,\omega)$ obtenu en sortie du filtre est-il stationnaire au 2^{nd} ordre ?

2.3 Déterminez en sortie du filtre le rapport entre la puissance du signal $S'(t,\omega)$ et la puissance du bruit $b'(t,\omega)$.
2.4 Conclusion sur l'efficacité du filtrage.

Exercice III

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions d'autocorrélation ? Justifier.

1. $c(\tau) = \sin c(\frac{\tau}{T})$
2. $c(k) = \boldsymbol{1I}_{[-\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}]}$
3. $c(\tau) = \frac{No}{\boldsymbol{2}}\delta(\tau)$