Q.R.O.C module A22 Année 2016/2017
Matériel électronique non autorisé
Feuille A4 recto-verso de notes personnelles

Formulaire :

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

Exercice I (10 points)

Le signal *x(n)* est appliqué à l'instant *n* à l'entrée d'un filtre numérique dont le signal de sortie $y(n)$ est donné par la relation de récurrence:

$$y(n) = x(n) + \frac{a}{2}y(n-1) \qquad (1)$$

avec a réel positif et x(n) est un signal aléatoire prenant indépendamment les valeurs +1 et -1 avec la même probabilité. x(n) est stationnaire au 2nd ordre.

1) Caractéristiques du filtre numérique

1.1 Déduire de (1) la réponse impulsionnelle *h(n)* du filtre

1.2 En précisant le domaine de convergence, calculer *H(z)* le transformée en z de *h(n)*. Pour quelles valeurs de a, la transformée de Fourier $H(f)$ peut-être calculée?

1.3 Quelles sont les caractéristiques du filtre? Justifier. Pour quelles valeurs de a est-il stable?

1.4 Calculer et représenter $|H(f)|^2$ en mentionnant les points remarquables sur les axes.

2) Caractéristiques du signal x(n)

1.5 Calculer la moyenne statistique *E(x(n))*

1.6 A partir du calcul de $E(x(n)x(n-k))$ pour k=0 et k=1, en déduire la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(k)$.

1.7 Déduire de 1.6, la densité spectrale $S_x(z)$ de x(n)

3) Caractéristiques du signal y(n)

1.8 Montrer que *y(n)* est stationnaire au 2nd ordre.

1.9 Calculer la densité spectrale $S_y(z)$ de y(n) en déduire $S_y(f)$

1.10 Conclusion

Exercice II (6 points)

Soit $A(\omega)$ une variable aléatoire uniformément répartie dans $[0, \pi]$.

2.1 Calculez $E(A(\omega))$ et $E(A(\omega)^2)$

Soit le processus aléatoire $X(t,\omega) = \cos(2\pi f_0 t + A(\omega))$

2.2 Donnez deux représentations de X associées à deux réalisations de *A*

2.3 $X(t,\omega)$ est-il stationnaire au second ordre ? Justifiez.

TSVP

Exercice III

Soit x(t) le processus aléatoire défini par $x(\omega,t) = a_0(\omega)\sin(2\pi f_0 t) + a_1(\omega)\cos(2\pi f_1 t)$ avec a_0 et a_1 deux variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes et de variance égale à 1.

3.1 Calculez la moyenne statistique $E(x(\omega,t))$ et la fonction d'autocorrélation statistique $E(x(\omega,t)x(\omega,t-\tau))$.

3.2 A quelle condition sur f_0 et f_1, $x(\omega, t)$ devient stationnaire au second ordre ?

3.3 Si cette relation est respectée, calculez sa densité spectrale de puissance notée $S_x(f)$. Représentez $S_x(f)$ en mentionnant les points remarquables sur le graphe.