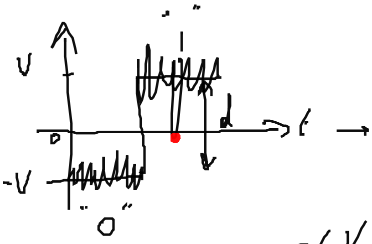
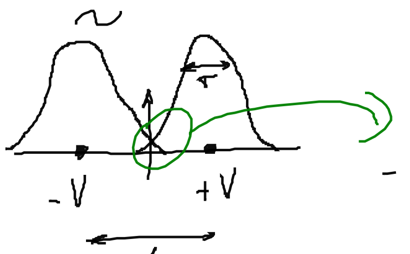
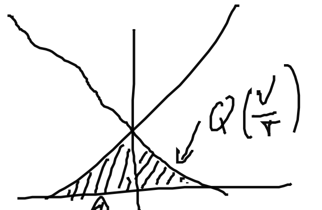
Probabilité d'erreur





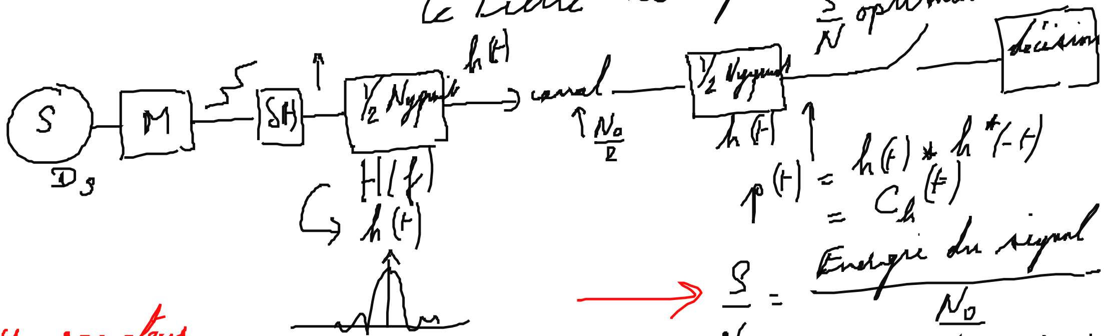


$Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$ ← $\frac{1}{2}$ distance
← valeur eff. du bruit

$$P_e = \frac{2\,Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)}{2} = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

symboles équiprobables

Le Filtre adapté



$$p(t) = h(t) * h^*(-t) = C_h(t)$$

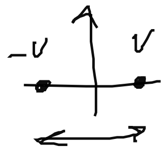
$$\frac{S}{N} = \frac{\text{Energie du signal}}{\frac{N_0}{2}}$$

$$P(f) = H(f)\cdot H^*(f) = |H(f)|^2$$

Un récepteur équipé du filtre adapté est dit Optimum.

Introduction du filtrage adapté ds le calcul de Pe.

$$Q\left(\frac{V}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{2}\,\frac{d}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{d^2}{\sigma^2}}\right)$$



$$\frac{d^2}{\sigma^2} = \frac{\text{puissance du signal de différence entre 2 symboles voisins}}{\text{Puissance du bruit}}$$

grâce au filtrage adapté

$$\frac{d^2}{\sigma^2} = \frac{\text{Energie du signal de différence}}{\text{DSP bilatérale du bruit}}$$

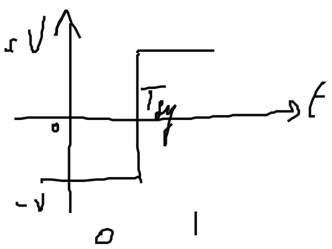
$$= \frac{E_D}{\frac{N_0}{2}} = \frac{2E_D}{N_0} = \frac{2 \cdot 4V^2 T_{symb}}{N_0}$$

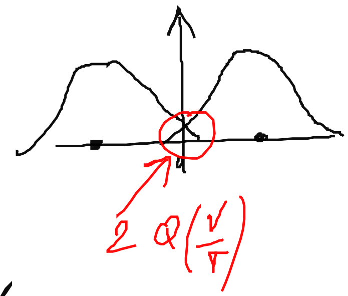
$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_D}{N_0}\cdot\frac{1}{4}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_D}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{{}^{2}\cancel{4}V^2 T_{sy}}{\cancel{2}N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2V^2T_s}{N_0}}\right)$$

Introduction du rapport $\frac{E_B}{N_0}$.

E_B = énergie moyenne par élément binaire (J/bit)

N_0 = DSP du bruit





$$P_e = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

grâce au filtre adapté

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2V^2 T_{sy}}{N_0}}\right)$$

Retour au signal

$$P_{moy} = \Sigma x^2 p(x)$$
$$= (-V)^2 \frac{1}{2} + V^2 \cdot \frac{1}{2} = V^2$$

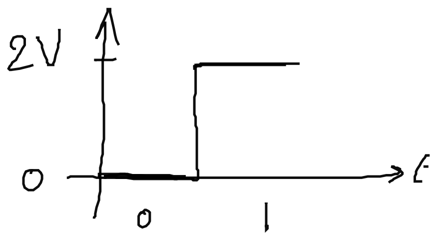
$$\bar{E}_S = P_{moy} \cdot T_{symb} = V^2 T_S$$
$$= E_B$$

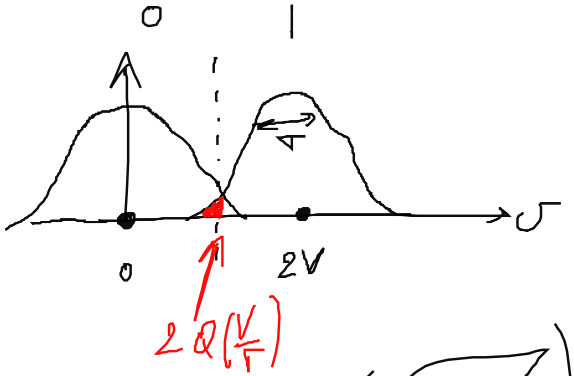
Par substitution, on obtient

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right)$$

(signal binaire polaire)

Cas du signal unipolaire





$$P_e = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

grâce au filtre adapté $\longrightarrow$ $P_e = Q\left(\sqrt{\dfrac{2V^2 T_{sy}}{N_0}}\right)$

Retour au signal

$$P_{moy} = \left[(0)^2 + (2V)^2\right]\frac{1}{2} = 2V^2$$

$$\bar{E}_s = E_B = 2V^2 T_{sy}.$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right)$$

(signal unipolaire)

Comparaison :

Signal polaire

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right)$$

Signal unipolaire

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right)$$

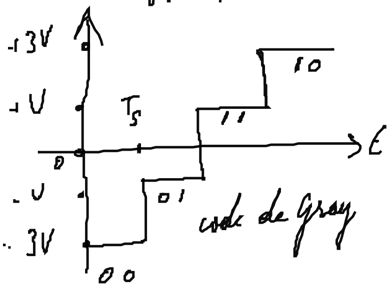
Pour avoir la même probabilité d'erreur (même qualité de transmission, on doit faire :

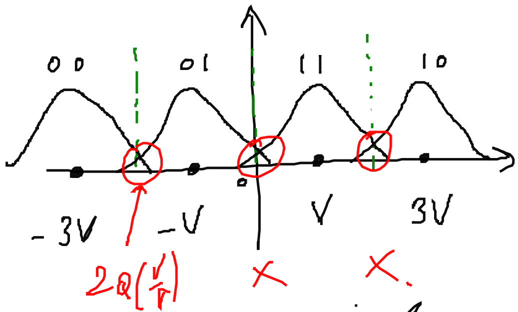
$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_B'}{N_0}}\right)$$

d'où $E_B' = 2E_B$: la transmission d'un bit "unipolaire" consomme 2 fois plus d'énergie que la transmission d'un bit "polaire". le bilan energetique est en faveur du signal polaire.

le cas du signal quaternaire polaire

$M = 4$





$$P_{e\,symb} = \frac{6\,Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)}{4} = \frac{3}{2}\,Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

Pour M quelconque :

$$\frac{2(M-1)}{M}\,Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

grâce au filtre adapté

$$P_{e\,symb} = \frac{3}{2}\,Q\left(\sqrt{\frac{2V^2T_s}{N_0}}\right)$$

Retour au signal :

$$P_{moy} = \frac{(-3V)^2 + (-V)^2 + V^2 + (3V)^2}{4}$$

$$= \frac{9V^2 + V^2 + V^2 + 9V^2}{4}$$

$$= \frac{20V^2}{4} = 5V^2$$

Par symétrie, on aurait pu faire le calcul dans un quadrant : $\frac{V^2 + 9V^2}{2} = 5V^2$

$$\overline{E_s} = 5V^2 T_s$$

$$\overline{E_S} = 5\, V^2\, T_S$$

$$E_B = \frac{\overline{E_S}}{\log_2 M} = \frac{\overline{E_S}}{2} = \frac{5}{2} V^2 T_S$$

$$V^2 T_S = \frac{2}{5} E_B$$

Par substitution, on obtient :

$$P_{e_{symb}} = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2 V^2 T_s}{N_0}}\right) = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{E_B}{N_0}}\right)$$

Dans le cas général, M quelconque :

$$\begin{cases} P_{e\,symb} = \dfrac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\dfrac{6}{M^2-1} \cdot \log_2 M \cdot \dfrac{E_B}{N_0}}\right) \\ P_{e_{bit}} = \dfrac{P_{e\,symb}}{\log_2 M} = \dfrac{3}{4} Q\left(\sqrt{\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{E_B}{N_0}}\right) \text{ pour } M = 4. \end{cases}$$

Ex 4.1 Signal binaire polaire avec $P_e = 10^{-6}$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right) = 10^{-6} \quad \left.\right\} \quad 10^{-6} = Q(x)$$

$$X = 4{,}75 = \sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}$$

$$\frac{E_B}{N_0} = 4{,}75^2 \cdot \frac{1}{2} = 11{,}28$$

$10{,}5$ dB

Relation entre $\frac{S}{N}$ et $\frac{E_B}{N_0}$.

$$\frac{S}{N} = \frac{\text{Puissance signal}}{\text{Puissance du bruit}} = \frac{E_B \cdot D_S}{N_0 \cdot B_N} = \frac{E_B}{N_0} \cdot \eta$$

$$\eta = \frac{D_S}{B_N} = \frac{D_C \cdot \log_2 M}{B_N} = \frac{2\cancel{B_N} \cdot \log_2 M}{\cancel{B_N}} = 2\log_2 M \text{ en B de base}$$

$= 2$ bits/s/Hz si $M=2$

$$\frac{S}{N} = \frac{E_B}{N_0} \cdot 2 \text{ ds le cas binaire.}$$

$$= 11{,}28 \cdot 2 = 22{,}56 \rightarrow 13{,}5 \text{ dB}$$

On remplace le signal binaire par un signal quaternaire ($M=4$), avec le même rapport $\frac{S}{N}$ de 22,56

On a $\frac{S}{N} = \frac{E_B}{N_0} \cdot \eta \Rightarrow \frac{E_B}{N_0} = \frac{S}{N} \cdot \frac{1}{\eta}$

Dans le cas quaternaire :

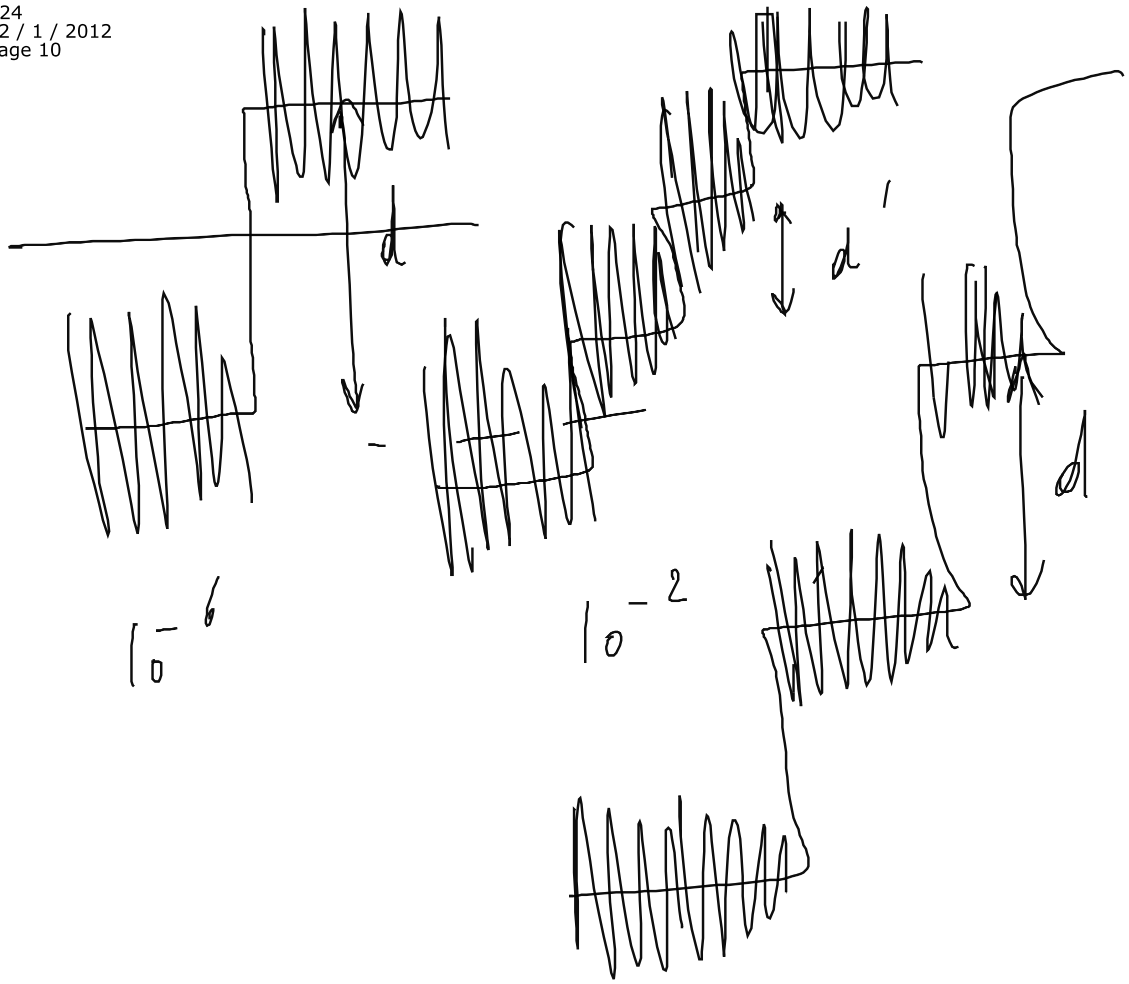
$$\frac{E_B}{N_0} = \frac{S}{N} \cdot \frac{1}{2 \log_2 M} = 22{,}56 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 5{,}64 \rightarrow 7{,}5 \text{ dB}$$

On a $Pe_{bit} = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{E_B}{N_0}}\right)$

$$= \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5} \cdot 5{,}64}\right) = \frac{3}{4} Q(2{,}12) = \frac{3}{4} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-2}$$

$$= 1{,}27 \cdot 10^{-2}$$


d
d'
d
10^{-6}
10^{-2}

4.2 On passe de $M=2$ à $M=8$

On veut conserver $P_{e\,symb} = 10^{-4}$

$\frac{E_B}{N_0}$? pour $M=8$ → accroissement de E_B nécess

a) le signal binaire

$$10^{-4} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right) = Q(x) \to x = 3,7$$

$$\frac{E_B}{N_0} = 3,7^2 \cdot \frac{1}{2} = 6,84 \to 8,35\ dB$$

$$\frac{S}{N} = \frac{E_B}{N_0} \cdot \eta = 6,84 \cdot 2 = 13,68 \to 11,35\ dB$$

b) le signal de valence 8 ou 8-aire :

$$10^{-4} = \frac{7}{4} Q\left(\sqrt{\frac{6}{63} \cdot 3 \cdot \frac{E_B}{N_0}}\right) = \frac{7}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2}{7} \cdot \frac{E_B}{N_0}}\right)$$

$$10^{-4} = \frac{7}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2}{7} \cdot \frac{E_B}{N_0}}\right)$$

$$\frac{4}{7} \cdot 10^{-4} = Q(X) = 0{,}57 \cdot 10^{-4} = 5{,}7 \cdot 10^{-5}$$

$$X = 3{,}86$$

$$\frac{E_B}{N_0} = 3{,}86^2 \cdot \frac{7}{2} = 52{,}14 \rightarrow 17{,}2 \text{ dB}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{E_B}{N_0} \cdot \eta = 52{,}14 \cdot 2 \log_2 8$$

$$= 52{,}14 \cdot 6 = 312{,}84 \rightarrow 25 \text{ dB}$$

<u>Comparons au cas binaire.</u> (pour le $\hat{m}$ bruit : $\hat{m}\ N_0$, $\hat{m}\ N$)

$\frac{E_B}{N_0} = 8{,}35$ dB $\longrightarrow \Delta$ de 9 dB en plus pour $M = 8$

$\frac{S}{N} = 11{,}35$ dB $\longrightarrow \Delta$ de 14 dB

Shannon pour $M=8$

$$C = B_N \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \quad \text{en bits/s}$$

$$\frac{C}{B_N} = \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

$$\eta = \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

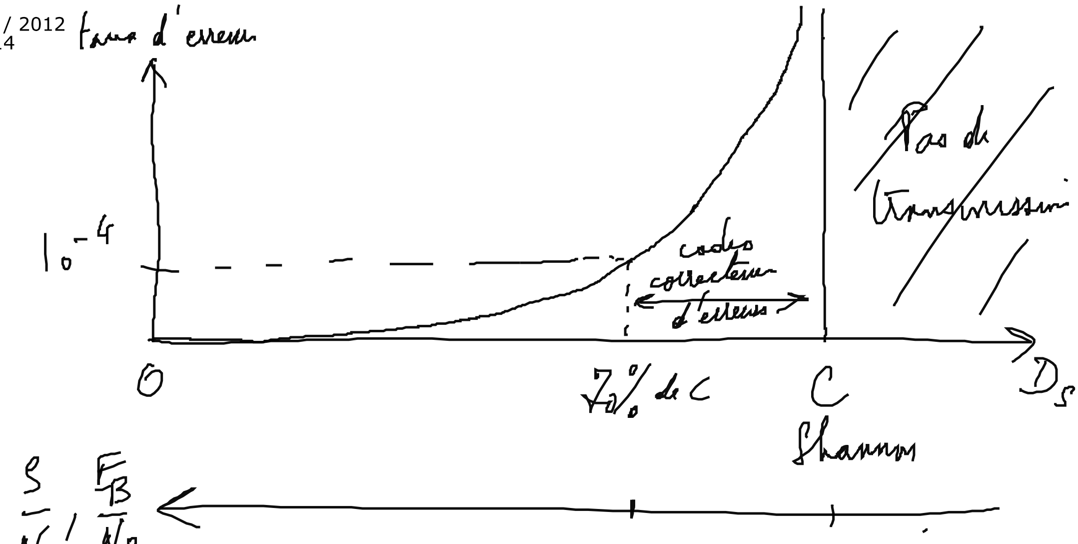
$$= 2\log_2 M$$

$$= 2\log_2 8 = 6$$

$$2^6 = 1+\frac{S}{N} \Rightarrow 63 = \frac{S}{N} \rightarrow 18\ dB$$

$$\frac{E_B}{N_0} = \frac{S}{N}\cdot\frac{1}{\eta} = \frac{63}{6} = 10{,}5 \rightarrow 10{,}2\ dB$$

à comparer à 17,2 dB



minimum de Shannon

$\frac{E_B}{N_0} \to 17,2$

10,2

4.3 $\quad M = 64 \qquad P_{e_{symb}} = 2 \cdot 10^{-5}$

$$\frac{E_B}{N_0} = 23\,dB$$

Si code de Gray = 1 seul bit change d'un symbole au voisin

$$P_{e\,bit} = \frac{P_{e\,symb}}{\log_2 M}$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-5}}{\log_2 64} = \frac{2\,10^{-5}}{6}$$

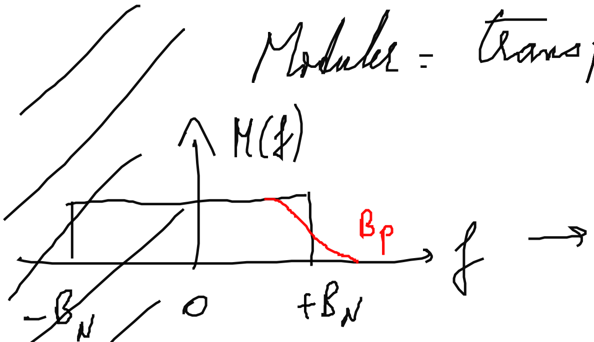
$$= 0{,}33 \cdot 1^{-5}$$

$$= 3{,}3 \cdot 10^{-4}$$

$\simeq$ 3 bits faux pour 10000 reçus.

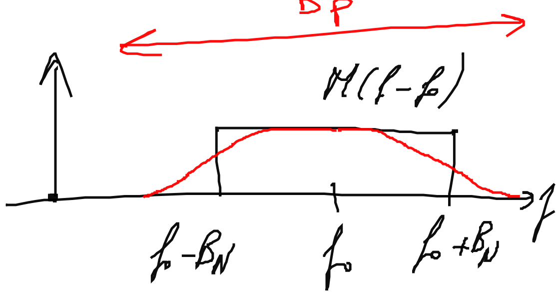
Modulations

Moduler = transposer en fréquence



$B_p = B_N(1+\alpha)$

$\eta = 2\log_2 M$



fréquence porteuse

$B_p = 2B_N(1+\alpha)$

$\eta = \log_2 M$