A41

Examen 2009 (tutelnet)

Correction: 2 dec. 2009

1 Poste de secours

Il s'agit de la file $M/M/1/\infty$ avec comme paramètres

$$\begin{aligned} \lambda &= 4 \text{ clients/H} \\ \mu &= 6 \text{ clients/H} \end{aligned}$$

Q 1.1 – Soit $N(t)$ le nombre de clients se présentant à l'entrée du système (processus de Poisson) pendant un intervalle de temps t. On sait que

$$\text{Prob}\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{N(1) = 4\} &= e^{-4}\frac{4^4}{4!} = \boxed{0.195} \\ \text{Prob}\{N(2) = 8\} &= e^{-8}\frac{8^8}{8!} = \boxed{0.139} \end{aligned}$$

Ces probabilités ne sont pas égales car s'il arrive 8 clients sur 2 heures, cela ne signifie pas que 4 clients sont arrivés pendant la première heure.

Q 1.2 – Calculer la probabilité qu'un accidenté soit examiné pendant plus de 20 minutes. On utilise la loi exponentielle

$$\text{Prob}\{T_S > t\} = e^{-\mu t},$$

ce qui donne $\text{Prob}\{T_S > 1/3\} = e^{-2} = \boxed{0.135}$.

Q 1.3 – Montrer que la condition d'*ergodicité* est vérifiée et calculer la probabilité π_n qu'il y ait n accidentés dans le poste de secours à un instant donné (en régime stationnaire).

Pour une file $M/M/1/\infty$, la condition d'ergodicité est $a := \frac{\lambda}{\mu} < 1$, ce qui est le cas puisque $\boxed{\text{a} = 2/3}$. La distribution stationnaire est $\boxed{\pi_n = (1-a)a^n}$.

Q 1.4 – Déterminer les paramètres suivants :

- le nombre moyen d'accidentés dans le poste de secours
- le nombre moyen d'accidentés en attente
- le temps moyen de présence dans le poste de secours
- le temps moyen d'attente d'un accidenté avant d'être examiné.

Les formules suivantes ont été vues en cours et se démontrent en utilisant la formule de Little.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(L) &= \frac{a}{1-a} = \boxed{2} \text{ clients} \\
\mathrm{E}(L_q) &= \frac{a^2}{1-a} = \boxed{4/3} \text{ clients} \\
\mathrm{E}(T) &= \frac{1}{\mu-\lambda} = \boxed{0.5} \text{ heure} = 30 \text{ min} \\
\mathrm{E}(T_q) &= \mathrm{E}(T) - \mathrm{E}(T_S) = 30 \text{ min} - 10 \text{ min} = 20 \text{ min} = \boxed{1/3} \text{ heure}
\end{aligned}$$

Q 1.5 – Quand il y a déjà 3 malades en attente, on décide que les *nouveaux* arrivants sont immédiatement transférés à l'hopital le plus proche pour y être examinés. Quelle est la proportion des accidentés qui sont ainsi imédiatement transférés sans examen préalable ?

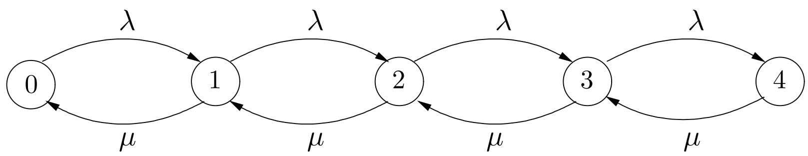

FIG. 1 – File $M/M/1/4$ avec $\lambda = 4$, $\mu = 6$

Le calcul de la distribution stationnaire donne (voir figure 1)

$$\pi_k = \frac{a^k}{1 + a + a^2 + a^3 + a^4} \qquad k = 0 \ldots 4$$

avec $a = 2/3$. La proportion de clients rejetés est donc $\boxed{\pi_4 = \frac{16}{211}}$.

Q 1.6 – Avec ces nouvelles règles de fonctionnement, recalculer les paramètres :
- le nombre moyen d'accidentés dans le poste de secours
- le nombre moyen d'accidentés en attente
- le temps moyen de présence dans le poste de secours
- le temps moyen d'attente d'un accidenté avant d'être examiné.

Il faut tenir compte des clients refusés à l'entrée du système. On applique la formule de Little $\mathrm{E}(L) = \lambda_e \mathrm{E}(T)$ avec $\lambda_e = \lambda(1 - \pi_4)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(L) &= \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 = \boxed{262/211} \text{ clients} \\
\mathrm{E}(T) &= \frac{1}{\lambda_e}\mathrm{E}(L) = \boxed{0.336} \text{ heure} = 20.15 \text{ min} \\
\mathrm{E}(T_q) &= \mathrm{E}(T) - \mathrm{E}(T_S) = 10.15 \text{ min} = \boxed{11/65} \text{ heure} \\
\mathrm{E}(L_q) &= \lambda_e \mathrm{E}(T) = \frac{132}{211} = \boxed{0.656} \text{ clients}
\end{aligned}$$

2 Salon de coiffure

Dans un salon de coiffure, il existe 4 fauteuils et un seul coiffeur opère. Un client qui arrive et trouve les 4 sièges occupés s'en va ailleurs. On suppose que les clients arrivent au rythme de 6 par heure et que ces arrivées sont poissoniennes. Une coupe dure en moyenne 20 minutes et sa durée suit une loi exponentielle.

Q 2.1 – Modéliser le problème en faisant le dessin de la chaine de Markov.

Il s'agit de la file $M/M/1/4$ avec $\boxed{\lambda = 6}$ clients/H et $\boxed{\mu = 3}$ clients/H. Par suite $\boxed{a = 2}$.

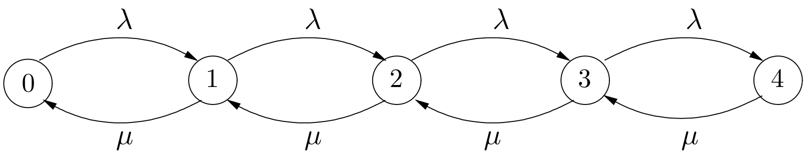

FIG. 2 – File $M/M/1/4$ avec $\lambda = 6$, $\mu = 3$

Q 2.2 – Déterminer la probabilité invariante π_n en justifiant son existence ($0 \leq n \leq 4$). La chaine de Markov contient un nombre fini d'états donc il existe au moins une distribution invariante. Le calcul donne

$$\pi_n = \frac{a^n}{1 + a + a^2 + a^3 + a^4}, \qquad (n = 0, \ldots, 4)$$

Q 2.3 – Quelle est la probabilité pour qu'un client arrivant puisse se faire couper les cheveux sans attendre ?

$\boxed{\pi_0 = 1/31}$.

Q 2.4 – Quel est le pourcentage de clients potentiels refusés ?

$\boxed{\pi_4 = 16/31}$.

Q 2.5 – Notre génial Figaro invente une nouvelle coupe et, suite à cela, il voit ses clients arriver au rythme de 20 par heure (arrivées poissonniennes). Afin de faire face, il change d'organisation et recrute 3 autres coiffeurs. Lorsque les 4 coiffeurs sont occupés, les clients sont refusés. Quel doit être alors le temps d'une coupe pour que les 4 coiffeurs soient occupés *simultanément* 50% du temps ?

On modélise par la file $M/M/4/4$ avec $\lambda = 6$ et μ inconnu (c'est la question).

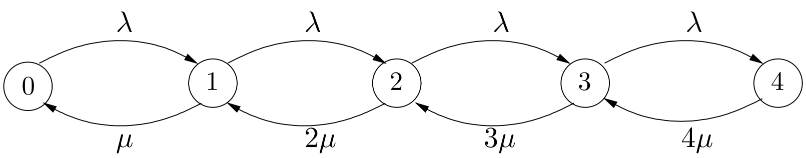

FIG. 3 – File $M/M/4/4$

Le calcul de la distribution strationnaire donne (formule Erlang B)

$$\pi_n = \frac{\dfrac{a^n}{n!}}{1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \dfrac{a^3}{3!} + \dfrac{a^4}{4!}}, \qquad (n = 0, \ldots, 4)$$

Les 4 coiffeurs occupés *simultanément* lorsque le système est dans l'état 4. La condition $\pi_4 = \frac{1}{2}$ s'écrit

$$\frac{\frac{a^4}{4!}}{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!}} = \frac{1}{4}.$$

Un calcul sur machine donne $a = 6.501$. On en déduit le temps de service moyen

$$\mathrm{E}(T_S) = \frac{1}{\mu} = \frac{a}{\lambda} = 1.08 \text{ heure} = \boxed{65.0} \text{ min.}$$

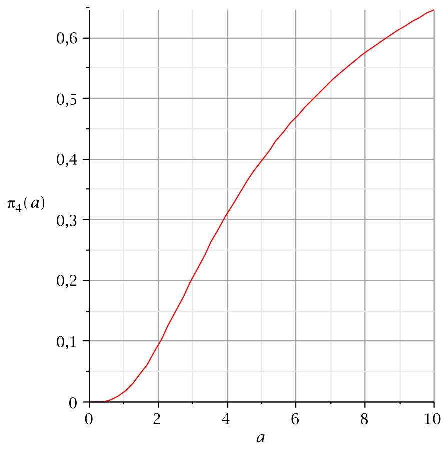

FIG. 4 – Représentation graphique de $\pi_4(a)$ en fonction de a.

3 Planification de tâches

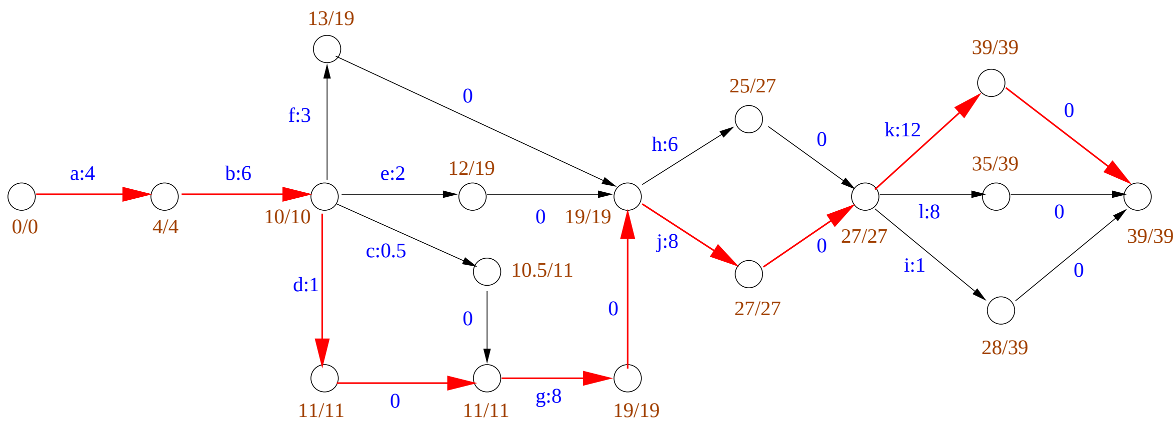

FIG. 5 – Durée totale des travaux = 39. Le chemin critique est en rouge.