A41 (correction)

Examen du 14 octobre 2010 (tutelnet)
Tous documents autorisés.
durée 2 heures

1 Ruine du joueur

Un joueur entre dans un casino avec une somme de n euros en poche avec la ferme intention de quitter ce casino dès qu'il aura amassé une somme N fixée à l'avance (bien sûr $N > n$). Un joueur qui est ruiné (il n'a plus d'argent) est obligé d'arrêter de jouer car le casino ne fait pas crédit.

A chaque partie, le joueur mise 1 euro : il a la probabilité p de gagner sa mise et donc la probabilité $q := 1 - p$ de perdre sa mise. Le temps t est un nombre entier positif ou nul. En fait l'entier t compte le nombre de parties jouées ; ainsi à l'instant $t = 5$, le joueur a joué exactement 5 parties.

Q 1.1 –

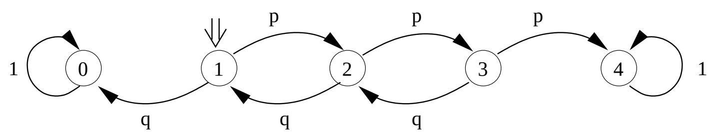


Fig. 1 – La ruine du joueur

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q 1.2 –

$$\pi(0) = (0, 1, 0, 0, 0)$$
$$\pi(t) = \pi(0)P^t \text{ pour tout } t \in \mathbb{N}$$

Q 1.3 –

$$P(9, 10) = P(90, 100) = P(900, 1000) = \boxed{0.9}$$

On en déduit que seule compte la proportion entre le point de départ n et le point d'arrivée N.

Q 1.4 – Le calcul donne $q = 20/38$ et $a = 10/9$. Finalement

$$P(9,10) = \boxed{84.6\%} \quad P(90,100) = \boxed{34.8\%} \quad P(900,1000) = \boxed{0.0026\%}$$

Les résultats sont trés différents, bien que la proportion n/N soit respectée. Le joueur a intérêt à jouer *gros*. Ainsi, il pourra arriver à une somme de 1000 en partant d'une somme égale à 900 avec une probabilité de 84.6% s'il mise à 100 chaque partie.

Q 1.5 – Comme le jeu est favorable au trader, celui–ci doit jouer de petites sommes un grand nombre de fois.

2 Routeur

On considère un routeur qui reçoit en moyenne 2 paquets par unité de temps (milliseconde) selon un processus de Poisson. On suppose que le temps de traitement d'un paquet par le routeur est distribué selon une loi exponentielle de moyenne 0,4ms.

Q 2.1 – On a $\lambda = \boxed{2}$, $\mu = \boxed{5/2}$ et donc $a := \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{4}{5}$. On sait que

$$\text{Prob}\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Pour $t = 1$ et $k = 2$, on trouve $\text{Prob}\{N(1) = 2\} = \boxed{0.27}$.

Q 2.2 – On utilise la loi exponentielle

$$\text{Prob}\{T_S > t\} = e^{-\mu t},$$

ce qui donne $\text{Prob}\{T_S > 1\} = e^{-5/2} = \boxed{0.082}$.

——— On prévoit une file d'attente de capacité illimitée.

Q 2.3 – Il s'agit de la file $M/M/1/\infty$.

Q 2.4 – Pour une file $M/M/1/\infty$, la condition d'ergodicité est $a := \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, ce qui est le cas puisque $\boxed{\text{a} = 4/5}$. La distribution stationnaire est $\boxed{\pi_n = (1-a)a^n}$.

La probabilité qu'un client soit servi sans séjourner dans la file d'attente est

$$\pi_0 = 1/5 = \boxed{0.2}.$$

Q 2.5 – Les formules suivantes ont été vues en cours et se démontrent en utilisant la formule de Little.

$$\begin{aligned} \text{E}(L) &= \frac{a}{1-a} = \boxed{4} \text{ clients} \\ \text{E}(T) &= \frac{1}{\mu - \lambda} = \boxed{2} \text{ ms} \\ \text{E}(L_q) &= \frac{a^2}{1-a} = \boxed{3.2} \text{ clients} \end{aligned}$$

——— On prévoit maintenant une file d'attente pouvant contenir au plus 3 clients (il y a donc au plus 4 clients dans le système à un instant donné). Lorsqu'un paquet arrive pendant que le routeur est occupé, il est perdu.

Q 2.6 – C'est la file $M/M/1/4$.

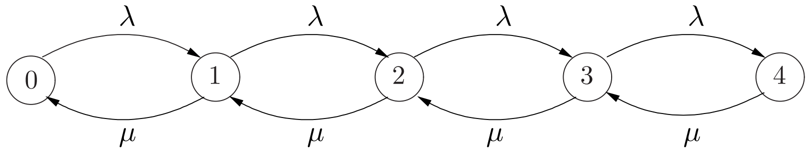


FIG. 2 – File $M/M/1/4$ avec $\lambda = 2$, $\mu = 5/2$

Q 2.7 – Le calcul de la distribution stationnaire donne (voir figure 2)

$$\pi_k = \frac{a^k}{1 + a + a^2 + a^3 + a^4} \text{ pour } k = 0 \dots 4$$

avec $a = 4/5$.

La probabilité qu'un client soit servi sans séjourner dans la file d'attente est

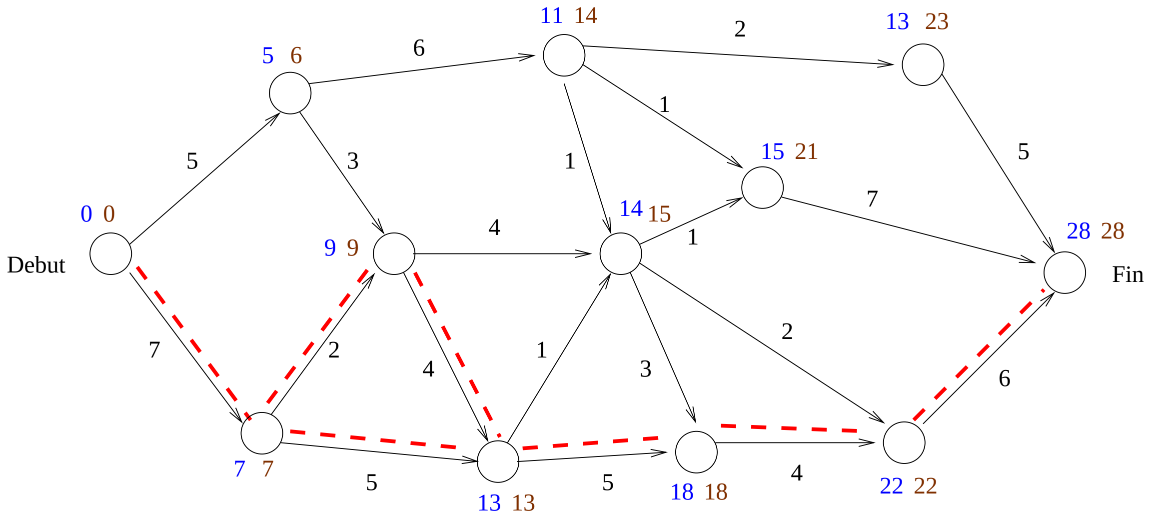
$$\pi_0 = \frac{1}{1 + a + a^2 + a^3 + a^4} = \frac{625}{2101} = \boxed{0.29}$$

Q 2.8 – Le pourcentage de paquets perdus est

$$\pi_4 = \frac{256}{2101} = \boxed{0.12}$$

Q 2.9 – En régime stationnaire, le nombre de clients traités par unité de temps est égal au nombre moyen de clients que l'on laisse rentrer dans le système. C'est donc $\lambda(1 - \pi_4) = \boxed{1.75}$ clients/ms.

3 Planification de taches



dates au plus tot
dates au plus tard
Chemin critique