A41

Examen du 12 décembre 2005
Tous documents autorisés.
durée 1 heure

Avertissement – Il sera tenu grand compte du soin apporté dans la rédaction des solutions. Pour chaque réponse, indiquer le numéro de la question traitée.

1 Exercice

Un serveur de base de données reçoit en moyenne 100 requêtes par seconde, arrivant selon un processus de Poisson. Le temps de traitement d'une requête suit la loi exponentielle de paramètre μ. Quand le serveur est occupé, les requêtes sont stockées sur un disque de grande taille pour être traitées ultérieurement selon le principe "premier arrivé, premier servi".

Q 1.1 – Modèliser par une chaine de Markov.

Réponse: file $M/M/1/\infty$.

A quelle condition, y-a-t'il une distribution stationnaire?

Réponse: lorsque $\lambda < \mu$.

Il existe, sur le marché, 4 types différents de serveurs pouvant traiter respectivement 100, 150, 200 ou 300 requêtes par seconde quand ils fonctionnent sans interruption.

Q 1.2 – Que se passera-t'il si l'on prévoit d'installer un serveur pouvant traiter 100 requêtes par seconde?

Réponse: La file va gonfler indéfiniement car $\mathrm{E}(L) = a/(1-a)$ avec ici $a = 1$.

Q 1.3 – On souhaite qu'un client qui émet une requête ait la réponse au bout de 1/100 seconde en moyenne. Quel type de serveur faut-il prévoir?

Réponse: Prévoir un serveur traitant $\mu = 200$ requêtes par seconde car $\mathrm{E}(T) = 1/(\mu - \lambda)$.

Dans les questions suivantes, on convient que lorsqu'il y a déjà 8 requêtes stockées dans la file d'attente, les nouvelles requêtes arrivantes seraient trop pénalisées au niveau du temps de réponse. Donc on décide que dans ce cas, elles seront redirigées instantanément sur un serveur auxiliaire. Pour simplifier, on supposera que cette nouvelle disposition a une influence négligeable sur l'ancienne distribution stationnaire (calculée sans serveur auxiliaire).

Q 1.4 – Calculer la probabilité qu'une requête qui arrive sur le serveur principal soit redirigée sur le serveur auxilaire.

Réponse: $\pi_9 = (1-a)a^9 = (1/2)^{10} = 1/1024$ car $a = 1/2$.

Q 1.5 – Combien, en moyenne, le serveur auxiliaire recevra-t'il de requêtes par seconde?

Réponse: $100/1024 \simeq 0.10$ requêtes par seconde.

Q 1.6 – L'approximation de calcul proposée vous paraît-elle justifiée? Si oui, pourquoi?

Réponse: L'approximation est justifiée car la somme $\pi_9+\pi_{10}+\pi_{11}+\cdots = 2/2^{10}$ doit maintenant être remplacée par 0. L'erreur relative commise sur chacune des probabilités $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_8$ est donc de l'ordre de 2/1000.

2 Exercice

Un cabinet comportant 2 experts, reçoit des clients qui arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ. Le temps d'une consultation est aléatoire en suivant la loi exponentielle de paramètre μ. La salle d'attente commune aux deux experts comporte deux places. Quand un des experts est libre, les clients sont reçus sans attendre dans le bureau de celui–ci. Les clients qui arrivent lorsque les deux places de la salle d'attente sont occupées, sont refusés.

Q 2.1 – Modéliser par une chaîne de Markov.

Réponse: C'est une file $M/M/2/4$

Q 2.2 – Calculer la distribution stationnaire en fonction du nombre $a = \lambda/\mu$.

Réponse: On trouve en résolvant l'équation de la balance $\pi_1 = a\pi_0, \pi_2 = \frac{a^2}{2}\pi_0, \pi_3 = \frac{a^3}{4}\pi_0, \pi_4 = \frac{a^4}{4}\pi_0$, ce qui implique $\pi_0 = \left(1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{4} + \frac{a^4}{8}\right)^{-1}$.

A quelle condition cette distribution stationnaire existe-t'elle?

Réponse: La distribution stationnaire existe dans tous les cas, car la chaine possède un nombre fini d'états.

Dans toute la suite, on suppose qu'il arrive en moyenne 2 clients par heure et que la durée moyenne d'une consultation est de 1/2 heure.

Q 2.3 – Quand les deux experts sont inoccupés, ils discutent entre eux des nouvelles règlementations. Quelle fraction du temps total ces discussions représentent-t'elles?

Réponse: $\pi_0 = \frac{8}{23}$ car $a = 1$.

Q 2.4 – Calculer le pourcentage moyen de clients rejetés.

Réponse: $\pi_4 = \frac{a^4}{8}\pi_0 = \frac{1}{23}$.

Q 2.5 – Calculer le nombre moyen de clients présents à un instant donné dans le cabinet, salle d'attente comprise.

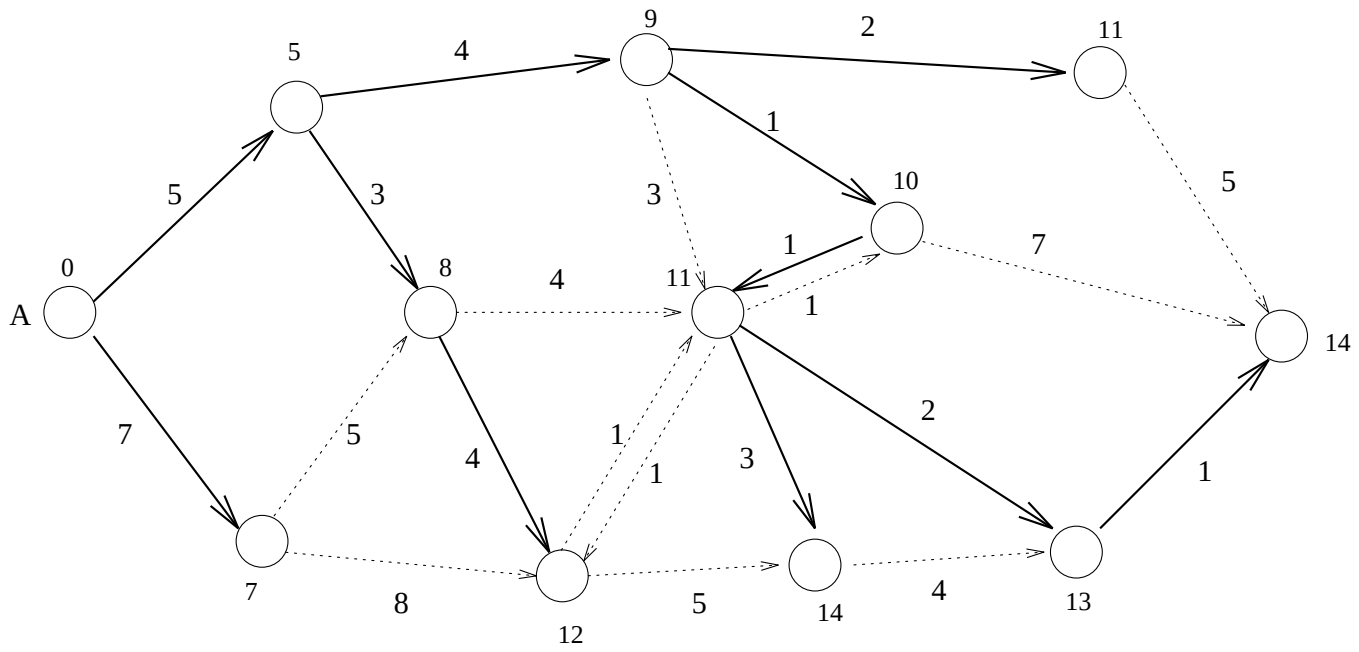
Réponse: $\mathrm{E}(L) = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 = \frac{26}{23}$ clients.

Q 2.6 – Quel est le temps moyen (attente + consultation) passé par un client admis en consultation?

Réponse: $\mathrm{E}(L) = \lambda_e \mathrm{E}(T)$ avec $\lambda_e = \frac{22}{23}\lambda = \frac{44}{23}$ clients/heure. Donc $\mathrm{E}(T) = \lambda_e^{-1}\mathrm{E}(L) = \frac{13}{22}$ heure.

3 Exercice

Q 3.1 – Dessiner l'arbre des chemins de longueur minimum partant du point de départ A et permettant de rallier tous les autres noeuds du graphe ci–join. A coté de chaque noeud, on indiquera la distance par rapport au noeud de départ A.


A
0
5
7
8
9
10
11
12
13
14
5
7
4
3
4
5
8
4
1
1
3
1
1
2
3
2
5
4
1
5
7
1