A41 (correction)

Examen de Février 2007 (tutelnet)
Tous documents autorisés.
durée 2 heures

Avertissement – Il sera tenu grand compte du soin apporté dans la rédaction des solutions. Pour chaque réponse, indiquer le numéro de la question traitée.

1 Exercice

Pierre possède 1 euro et a besoin de 5 euros. Pour acquérir l'argent qui lui manque, il participe au jeu de hasard suivant : à chaque coup, la somme misée sera gagnée avec la probabilité p et perdue avec la probabilité $q = 1 - p$. Pierre décide de miser à chaque coup la somme qui le rapprocherait le plus (en cas de gain) des 5 euros sans toutefois dépasser ce montant. Il ne peut naturellement pas miser plus d'argent qu'il ne possède et le nombre de coups n'est pas limité.
Q 1.1 – Modéliser par une chaine de Markov, les états étant numérotés de 0 à 5 selon la somme que Pierre possède.
Q 1.2 – Dans le cas où le jeu est équilibré i.e. $p = q = 1/2$, calculer les probabilités d'une part que Pierre soit ruiné $\boxed{4/5}$, d'autre part qu'il obtienne les 5 euros convoités $\boxed{1/5}$.

2 Exercice

A la Banque Générale , les clients se font servir par deux employés, l'un traitant les virements, l'autre les retraits. Les taux d'arrivée des clients sont identiques pour chaque guichet: 10 clients en moyenne par heure arrivant selon un processus de Poisson. Les temps de service moyens sont identiques, en moyenne 3 minutes, distribués selon la loi exponentielle. Il y a deux files d'attente, une devant chaque guichet et on suppose qu'on ne refuse aucun client. $\boxed{\lambda = 10, \mu = 20, a = 1/2}$
Q 2.1 – Indiquer la notation de Kendall $\boxed{M/M/1/\infty}$ du système et dessiner la chaine de Markov correspondant à l'un des deux guichets.
Q 2.2 – Quelle est la probabilité qu'un client soit servi en plus de 3 minutes ? $\boxed{e^{-1}}$ en moins de trois minutes ? $\boxed{1 - e^{-1}}$ en moins d'une minute ? $\boxed{1 - e^{-1/3}}$
Q 2.3 – Quelle la probabilité (stationnaire) qu'il y ait k clients dans la file des virements, le client en train d'être servi étant compté ?

$$\pi_k = (1 - a)a^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

Q 2.4 – Quelle est la probabilité qu'un client soit servi sans aucune attente ? $\boxed{\pi_0 = 1/2}$ Quel est le temps moyen passé par un client (attente + service) désirant effectuer seulement un virement ? $\boxed{6 \text{ min}}$ Même question pour un client désirant effectuer un virement plus un retrait. $\boxed{12 \text{ min}}$ Combien y a t'il en moyenne de clients dans la banque à un instant donné ? $\boxed{2}$

Le directeur de l'agence, ancien élève de l'ENIC, décide de regrouper les deux services, en demandant à chaque employé d'exécuter indifféremment chacune des deux opérations, le temps moyen de service pour chaque opération (3 minutes) étant inchangé. Il y a maintenant une file d'attente unique pour les deux guichets.

Q 2.5 – Indiquer la notation de Kendall $\boxed{M/M/2/\infty}$ du système et dessiner la chaine de Markov.

Q 2.6 – Etablir la formule donnant la probabilité (stationnaire) qu'il y ait k clients dans la banque?

$$\pi_0 = \frac{1-a}{1+a}, \quad \pi_k = 2a^k \frac{1-a}{1+a}, \quad (k \geq 1)$$

Q 2.7 – Quelle est la probabilité qu'un client soit servi sans aucune attente? $\boxed{\pi_0 + \pi_1 = 2/3}$

Q 2.8 – A votre avis, l'initiative du directeur améliore–t'elle la qualité de service? $\boxed{\text{oui}}$ Justifiez votre réponse.

3 Exercice

La demande d'un équipement important est de 3 unités pour chacun des quatre mois suivants: Janvier, Février, Mars et Avril. Les 3 unités sont livrées à la fin de chaque mois. La firme souhaite établir le plan de cette production à moindre coût.

Le stock doit être nul au 1er Janvier et au 30 Avril. Un équipement ne sera compté en stock que s'il est présent le 1er du mois. Ainsi un équipement fabriqué courant Janvier ne sera compté en stock que le 1er Février, auquel cas son coût de stockage sera imputé au mois de Février. La production maximale est de 4 unités par mois. Pour un stock de x équipements et une production de y équipements, le coût mensuel total est de $C(x,y) = f(y) + s(x)$ avec pour la fabrication $f(0) = 0$ et $f(y) = 10 + 2y$ lorsque $1 \leq y \leq 4$. Pour le stockage, on a $s(x) = 1 + x$ pour tout $x \geq 0$.

Q 3.1 – Modéliser par un graphe.

Q 3.2 – Etablir le plan de production au moindre coût. $\boxed{\text{coût total=64}}$