Modélisation des réseaux (tuttelnet)

Octobre 2007
Tous documents autorisés.
durée 2 heures

Avertissement – Il sera tenu grand compte du soin apporté dans la rédaction des solutions. Pour chaque réponse, indiquer le numéro de la question traitée.

1 Exercice

Q 1.1 – (voir dessin)
Q 1.2 – Au bout d'un temps tres long, Pierre soit a gagné 8 euros, soit a perdu 2 euros.
Q 1.3 – La variable aléatoire G qui prend l'une des deux valeurs 8 ou -2 avec les probabilités inconnues α et $(1-\alpha)$. Le jeu est équilibré ssi $p = q = 1/2$.

On a alors $\mathrm{E}(G) = 0$ soit $8\alpha - 2(1-\alpha) = 0$, ce qui donne $\boxed{\alpha = 1/5}$.

2 Exercice

Un poste de secours en montagne dispose d'un service d'urgence tenu par un seul secouriste. Les accidents arrivent selon un processus de Poisson. Il y a en moyenne 16 accidents sur une durée de 8 heures. Les durées des soins sont indépendantes en suivant une loi exponentielle de moyenne égale à 15 minutes pour chaque accidenté. Les accidentés sont examinés au poste de secours suivant l'ordre d'arrivée et il n'y a pas de limitation de place dans le service d'urgence. Ils sont ensuite orientés dans les services hospitaliers de la région en fonction de la gravité de leurs blessures.

Q 2.1 – On a $\lambda = 2$ clients/H et $\mu = 4$ clients/H d'ou $a := \lambda/\mu = 1/2$. La distribution stationnaire existe car $a < 1$.

La probabilité qu'il y ait n accidentés dans le système (file + service) à un instant donné en régime stationnaire vaut

$$\pi_n = a^n(1-a) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Q 2.2 – Déterminer les paramètres suivants :

- le nombre moyen d'accidentés dans le système $\mathrm{E}(L) = \dfrac{a}{1-a} = 1(\text{client})$.
- le temps moyen de présence dans le système $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{E}(L) = \dfrac{1}{2}(\text{heure})$.
- le temps moyen d'attente $\mathrm{E}(T_q) = \mathrm{E}(T) - \mathrm{E}(T_S) = \mathrm{E}(T) - \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{4}(\text{heure})$.
- le nombre moyen d'accidentés en attente $\mathrm{E}(L_q) = \lambda \mathrm{E}(T_q) = \dfrac{1}{2}(\text{client})$.

Q 2.3 – On souhaite que le nombre moyen d'accidentés en attente dans la salle d'attente soit inférieure ou égale à 1/4. A partir de quelle durée moyenne d'examen cette condition est–elle vérifiée ?

On pose $\mathrm{E}(L_q) \leq 1/4$. Les calculs donnent $4a^2 + a - 1 \leq 0$, ce qui donne $a_1 \leq a \leq a_2$ avec $a_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{8} = 0.39$. Finalement $\mathrm{E}(T_S) \leq 0.195$ heure $= 11.71$ minutes.

3 Exercice

On considère une file $M/M/1/4$ dont le taux d'arrivée des clients est λ. L'unique serveur a la capacité de traiter μ clients par unité de temps.

Q 3.1 – Le pourcentage de clients rejetés est π_4. Le calcul de la distribution stationnaire donne

$$\pi_k = \frac{a^k}{1 + a + a^2 + a^3 + a^4} \text{ avec } 0 \leq k \leq 4.$$

On considère maintenant une file $M/M/2/4$ dont le taux d'arrivée des clients est λ. Chacun des deux serveurs a la capacité de traiter $\frac{\mu}{2}$ clients par unité de temps.

Q 3.2 – Le pourcentage de clients rejetés est π_4. Le calcul de la distribution stationnaire donne

$$\pi_k = \frac{2a^k}{1 + 2a + 2a^2 + 2a^3 + 2a^4} \text{ avec } 1 \leq k \leq 4.$$

Q 3.3 – Quelle est la solution assurant la meilleure qualité de service. On fera le calcul numérique dans le cas $a = \frac{\lambda}{\mu} = 0,8$.

On trouve $\pi_4 = 0.1218$ dans le premier cas et $\pi_4 = 0.1431$ dans le second. La qualité de service est donc meilleure dans le premier cas mais la différence est faible. Lorsque $a \to 0$, le rapport des deux valeurs trouvées tend vers 1/2.

4 Exercice

Planification de la production : on travaille en flux tendu les deux premiers mois (2 unités produites par mois) et on produit 4 unités au mois de Juillet et aucune en Aout. Le cout total est alors $\boxed{99}$ unités de compte.