Modélisation des réseaux (tuttelnet)

Octobre 2007
Tous documents autorisés.
durée 2 heures

Avertissement – Il sera tenu grand compte du soin apporté dans la rédaction des solutions. Pour chaque réponse, indiquer le numéro de la question traitée.

1 Exercice

Pierre possède 2 euros et a besoin de 10 euros. Pour acquérir l'argent qui lui manque (8 euros), il participe au jeu de hasard suivant : à chaque coup, la somme misée sera gagnée avec la probabilité p et perdue avec la probabilité $q = 1 - p$. Pierre décide de miser à chaque coup la somme qui le rapprocherait le plus (en cas de gain) des 10 euros sans toutefois dépasser ce montant. Il ne peut naturellement pas miser plus d'argent qu'il ne possède et le nombre de coups n'est *pas* limité. Dès qu'il possède les 10 euros escomptés, il arrête de jouer.

Q 1.1 – Modéliser par une chaine de Markov, les états étant numérotés de 0 à 10 selon la somme que Pierre possède à un instant donné.

Q 1.2 – Examiner les diverses éventualités quant à la situation de Pierre au bout d'un temps très long ?

Q 1.3 – Soit la variable aléatoire G qui prend l'une des deux valeurs 8 ou -2 selon que la somme est finalement gagnée ou perdue par Pierre. La théorie des jeux nous dit que la moyenne $\mathrm{E}(G)$ de la variable aléatoire G est nulle. En déduire la probabilité que Pierre obtienne finalement les 8 euros qui lui manquent.

2 Exercice

Un poste de secours en montagne dispose d'un service d'urgence tenu par un seul secouriste. Les accidents arrivent selon un processus de Poisson. Il y a en moyenne 16 accidents sur une durée de 8 heures. Les durées des soins sont indépendantes en suivant une loi exponentielle de moyenne égale à 15 minutes pour chaque accidenté. Les accidentés sont examinés au poste de secours suivant l'ordre d'arrivée et il n'y a pas de limitation de place dans le service d'urgence. Ils sont ensuite orientés dans les services hospitaliers de la région en fonction de la gravité de leurs blessures.

Q 2.1 – Montrer que la distribution stationnaire existe et calculer la probabilité qu'il y ait n accidentés dans le système (file + service) à un instant donné en régime stationnaire.

Q 2.2 – Déterminer les paramètres suivants :

- le nombre moyen d'accidentés dans le système.
- le nombre moyen d'accidentés en attente.
- le temps moyen de présence dans le système.
- le temps moyen d'attente.

Q 2.3 – On souhaite que le nombre moyen d'accidentés en attente dans la salle d'attente soit inférieure ou égale à 1/4. A partir de quelle durée moyenne d'examen cette condition est–elle vérifiée ?

3 Exercice

On considère une file $M/M/1/4$ dont le taux d'arrivée des clients est λ. L'unique serveur a la capacité de traiter μ clients par unité de temps.

Q 3.1 – Calculer le pourcentage de clients rejetés et le temps moyen mis par un client pour traverser le système.

On considère maintenant une file $M/M/2/4$ dont le taux d'arrivée des clients est λ. Chacun des deux serveurs a la capacité de traiter $\frac{\mu}{2}$ clients par unité de temps.

Q 3.2 – Calculer le pourcentage de clients rejetés et le temps moyen mis par un client pour traverser le système.

Q 3.3 – Quelle est la solution assurant la meilleure qualité de service. On fera le calcul numérique dans le cas $a = \frac{\lambda}{\mu} = 0,8$.

4 Exercice

La demande d'un équipement important est de 2 unités pour chacun des 4 mois suivants : Mai, Juin, Juillet et Aout. Les 2 unités sont livrées à la fin de chaque mois. La firme souhaite établir le plan de cette production au moindre coût. Le stock ne peut dépasser 2 unités, ce stock est nul en Mai et doit être nul au 31 Aout. Un équipement ne sera considéré en stock que s'il est présent le 1er du mois, (ainsi un équipement fabriqué courant Mai ne sera compté en stock, s'il n'a pas été livré fin Mai, qu'au 1er Juin, auquel cas son coût de stockage sera imputé au mois de Juin). La production maximale est de 4 unités par mois. Pour un stock de x équipements, et une production y équipements, le coût mensuel vaut $C(x,y) = S(x) + P(y)$ avec $S(x) = 1 + x$ et $P(y) = 10 + 5y$ pour les trois premiers mois. Pour le mois d'Août (à cause des vacances), les coûts sont doublés donc $S(x) = 2 + 2x$ et $P(y) = 20 + 10y$.

Q 4.1 – Modèliser par un graphe.

Q 4.2 – Etablir un plan de production au moindre coût.