A41

Examen de octobre 2008 (tutelnet)
Correction

1 Exercice

Chaque étudiant de DING (redoublant ou non) a une probabilité p de réussir à l'examen annuel. On note $q = 1 - p$ la probabilité d'échouer.

Q 1.1 – Modéliser par une chaine de Markov le parcours scolaire d'un étudiant inscrit en DING et indiquer la matrice de transition.

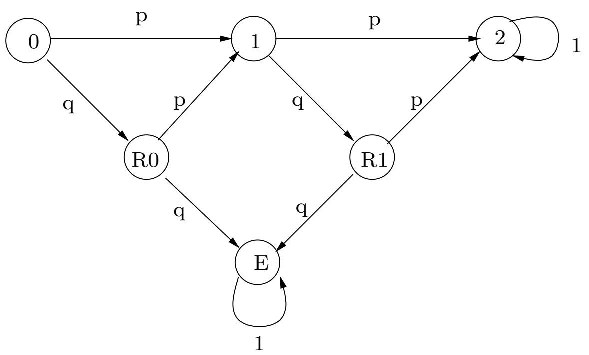


FIG. 1 – R0, R1 : redoublants ; E : echec définitif

Q 1.2 – Au bout de deux années d'étude, un étudiant peut être dans

état 2	succès total	Prob = p^2
état R1	redoublant	Prob = pq
état 1	1ere année	Prob = qp
état E	échec total	Prob = q^2

Q 1.3 – Le diplome est obtenu, en deux ans exactement avec la probabilité p^2, en trois ans exactement avec la probabilité $2p^2q$, en quatre ans exactement avec la probabilité p^2q^2, ce qui fait finalement une probabilité totale de $\boxed{p^2(1+q)^2}$.

2 Exercice

On a $\boxed{\lambda = 1}$ et $\boxed{\mu = 2}$ lorsque le temps est mesuré en milliseconde (ms), ce qui donne $\boxed{a := \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}}$.

Q 2.1 – On utilise la formule
$$\mathrm{Prob}\{T_S > t\} = e^{-\mu t},$$
ce qui donne, pour $t = 1$, la probabilité $\boxed{\exp(-2) = 0.135}$.

Q 2.2 – C'est une chaine $M/M/1/\infty$ qui admet une distribution stationnaire car $a < 1$.

Q 2.3 – Le nombre moyen de requêtes (clients) dans le système à un instant t donné est
$$\mathrm{E}(L) = \frac{a}{1-a} = \boxed{1}$$

Le temps moyen de traitement d'un paquet (attente comprise) est donné par la formule
$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \boxed{1 \text{ ms}}$$

Q 2.4 – Il faut résoudre l'équation $\pi_N = a^N(1-a) = 10^{-12}$, autrement dit
$$(N+1)\log 2 = 12 \ \log 10,$$
ce qui donne finalement $\boxed{N = 39}$.

Il existe, sur le marché, 4 types différents de serveurs pouvant traiter respectivement 1000, 2000, 3000 ou 4000 requêtes par seconde quand ils fonctionnent sans interruption.

Q 2.5 – L'équation à résoudre est
$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{2},$$
ce qui donne $\boxed{\mu = 3}$.

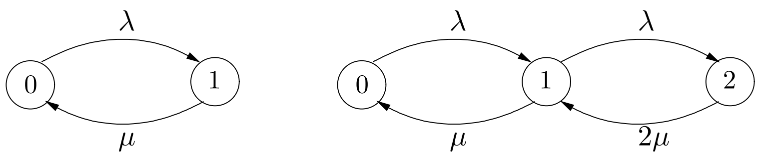
A titre expérimental, on envisage un système *sans* file d'attente mais comportant plusieurs serveurs de front. Lorsque tous les serveurs sont occupés, les requêtes sont rejetées.

Q 2.6 – Quelle est le pourcentage de clients rejetés pour un système comportant 1 serveur traitant 4000 requêtes par seconde ?

La distribution stationnaire (voir figure 2) est
$$\pi_0 = \frac{1}{1+a} = \frac{4}{5}$$
$$\pi_1 = \frac{a}{1+a} = \frac{1}{5}$$
avec $a = \frac{1}{4}$. La proportion de clients rejetés est donc $\boxed{\pi_1 = \frac{1}{5}}$.

Q 2.7 – Même question pour un système comportant deux serveurs traitant chacun 2000 requêtes par seconde.

Le calcul de la distribution stationnaire donne (voir figure 2)
$$\pi_0 = \frac{1}{1+a+\frac{a^2}{2}} = \frac{8}{13}$$
$$\pi_1 = \frac{a}{1+a+\frac{a^2}{2}} = \frac{4}{13}$$
$$\pi_2 = \frac{\frac{a^2}{2}}{1+a+\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{13}$$



(a) $\lambda = 1$, $\mu = 4$ (b) $\lambda = 1$, $\mu = 2$

FIG. 2 – Un serveur (a) Deux serveurs (b)

avec $a = \frac{1}{2}$. La proportion de clients rejetés est donc $\boxed{\pi_2 = \frac{1}{13}}$.

Q 2.8 – Même question pour un système comportant quatre serveurs traitant chacun 1000 requêtes par seconde.

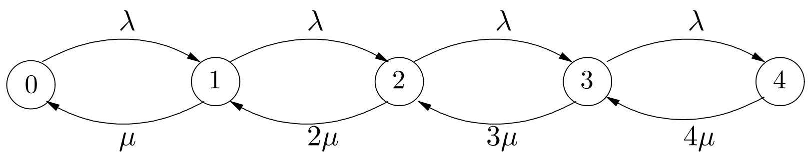


FIG. 3 – Quatre serveurs, $\lambda = 1$, $\mu = 1$

Le calcul de la distribution stationnaire donne (voir figure 3)

$$\pi_k = \frac{\frac{a^k}{k!}}{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!}}, \qquad k = 0 \ldots 4$$

avec $a = 1$. La proportion de clients rejetés est donc $\boxed{\pi_4 = \frac{1}{65}}$.

3 Exercice

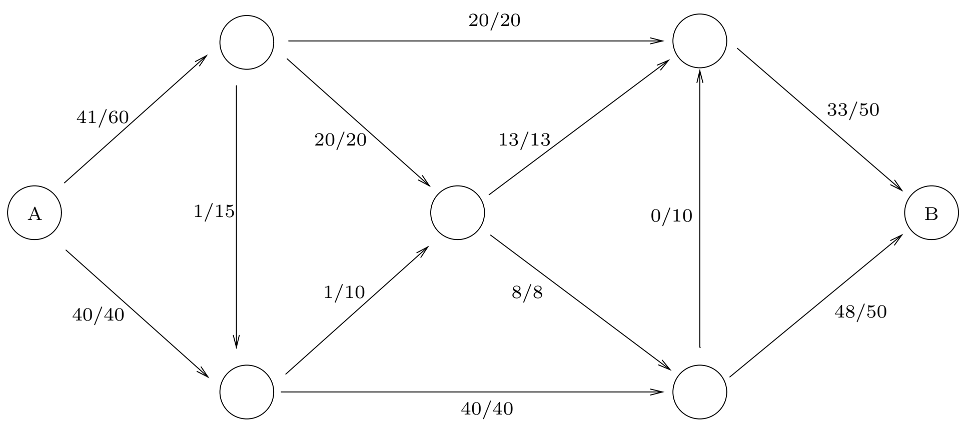


FIG. 4 – Le flot maximal entre A et B est 81