ÉLEMENTS DE PROBABILITES

I. DEFINITIONS :

Ω : Espace fondamental, ensemble des éléments possibles

τ : tribu, ensemble de travail. Si Ω dénombrable

$\Rightarrow \tau = P(\Omega) =$ ensemble des sous ensembles

$\bar{A}$ **:** Événement contraire = 1 – A

Sys comp d'évt : Evt incompatibles 2 à 2 et somme = Ω.

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ avec les proba totale

Dualité : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$A/B = A \cap \bar{B}$ = A privé de B

Espace probabilisé : (Ω, τ, P) avec P proba.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ avec $P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)}$

Proba conditionnelles : $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ « A sachant B »

Formule de Bayes : $P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1).P(A_1)}{P(B|A_1).P(A_1)+P(B|A_2).P(A_2)+\cdots+P(B|A_n).P(A_n)}$

A et B indépendants

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) et\ P(B|A) = P(B)$

II. VARIABLES ALEATOIRES REELLES

Fonction de répartition (= proba cumulées) :

$F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$

$t \to F_X(t) = P(X < t)$

Pour que F_X soit fn de rep. Il faut :

1. $F_X \nearrow \ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{(t \to a)_{t<a}} F_X(t) = F_X(a)\ \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0\ et\ \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

$P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

Espérance : Moyenne pondérée (mom. ordre 1) $E[X] = \sum X_i . P_i$

Variance : Moment d'ordre 2 $\sigma^2 = (E[X])^2 - E[X^2]$ (écart type σ)

Moment d'ordre n : $\sum (x_i - E[X])^n . P_X(x_i)$

III. V.A.R. DISCRETES

P_X **est entièrement définie par la probabilité de l'ensemble des singletons.**

$$F_X(t) = P(X < t) = \sum_{k \in I} P_X(x_k)$$

Propriétés :

$$E[a.X] = a.E[X]$$
$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$
$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X;Y)$$
$$Cov(X;Y) = E[X.Y] - E[X].E[Y]$$
$$E[a] = a\ ex.\ E[37] = 37$$
$$E[X+a] = E[X] + a$$
$$\sigma^2 \ge 0$$
$$\sigma^2_{a.X} = a^2.\sigma^2_X$$
$$\sigma^2_{a+X} = \sigma^2_X$$

X est centrée et réduite si $E[X] = 0\ et\ \sigma^2_X = 1$

Si X n'est pas centrée / réduite, $Y = \frac{X - E[X]}{\sigma_X}$ l'est.

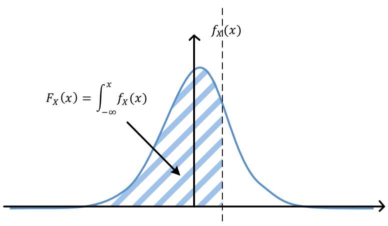
IV. V.A.R. ABSOLUMENT CONTINUE

Si Ω est finit ou dénombrable $\tau = P(\Omega)$ sinon, $\tau = \mathcal{B}(\Omega)$ (tribu des Boréliens – contient tous les intervalles possibles de Ω du style $]-\infty; x[$)

$F_X(x)$ est la loi de la v.a.r. Elle est dérivable. Fn de répartition

$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$ est la densité de probabilité. Conditions :

$$f_X(x) \ge 0\ \forall x$$
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$



$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx\ \ et\ \sigma^2_X = E[X - E[X]^2]$

V. LOIS USUELLES DISCRETES

Rappel : $P_X(k) = P(X < k)$, $P(x > K) = 1 - P(X < K)$

V-1. Bernoulli :

X	0	1
P_X	$1-p$	p

$E[X] = p$

Une variable 2 résultats possibles
Vrai ou Faux

$\sigma^2_X = p.(1-p)$

V-2. Binomiale (Bernoulli n fois) :

$P_X(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$avec\ C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$E[X] = n.p$

Une variable 2 paramètres
n et p et k nombre de succès

$\sigma^2_X = n.p.(1-p) = n.p.q$

V-3. Hypergéométrique (N boules dont K blanches et N-K noires) :

$P_X(t) = \frac{C_K^t . C_{N-K}^{n-t}}{C_N^n}$

$avec\ C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$E[X] = n.\frac{K}{N}$

$\max(0, n-N+K) \le k \le \min(n, K)$
N boules, K blanches, n tirées, P_X nombre de blanches (K)

$\sigma^2_X = \left[\frac{N-n}{N-1}\right].\frac{K}{N}.\left[1 - \frac{K}{N}\right]n.$

V-4. Loi de Poisson (Bernoulli ∞ fois – nbr appels / heures - …) :

$P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}, \forall k \in \mathbb{N}$

Paramètre λ
Si λ pour minutes, on utilise λt

$E[X] = \lambda$ $\qquad \sigma^2_X = \lambda$

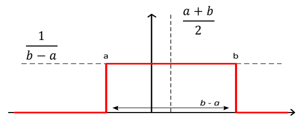
VI. LOIS USUELLES ABSOLUMENT CONTINUES

VI-1. Loi uniforme :

$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a,b]\ ou\ 0$

$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b]$

$0\ \forall\ x < a, 1\ \forall\ x > b$



$E[X] = \frac{a+b}{2}$

$\sigma^2_X = \frac{1}{12}(b-a)^2 \Rightarrow \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

VI-2. Loi normale ou gaussienne :

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_X}} e^{-\frac{(x-E[X])^2}{2\sigma^2_X}}$

$E[X] = \mu_X, \sigma^2_X ou\ \sigma_X$ paramètres

$X = N(\mu_X, \sigma^2_X)$

$I_A(x) = 1\ \forall\ x \in A, 0\ sinon$
$notée\ 1I_A$

Utiliser $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1)$ + tables

$P_X([\mu_X \pm 1{,}64\sigma_X]) = 0{,}9$

VI-3. Loi Exponentielle :

$f_X(x) = \lambda.e^{-\lambda x} \forall x \in \mathbb{R}, 0\ sinon$

$\lambda \ge 0$, paramètre

$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^t = F_X$

$P(X < t) = F_X = 1 - e^{-\lambda t}$

$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \sigma^2_X = \frac{1}{\lambda^2}$

VII. COUPLES DE V.A.R.

Soit X et Y deux V.A.R. discrètes

X/Y	1	2	3	Σ loi marg.
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$
Σ	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

INTEGRALES ET DERIVEES

I. PRIMITIVES USUELLES :

$f(t)$	$F(t)+k$
a	at
t^α	$\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}$
$u'(t).u^\alpha(t)$	$\frac{u^{\alpha+1}(t)}{1+\alpha}$
$\sqrt{t}$	$\frac{2}{3}t\sqrt{t}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$2\sqrt{t}$
$\frac{u'(t)}{u(t)}$	$\ln(\lvert u(t)\rvert)$
$\cos(at+b)$	$\frac{\sin(at+b)}{a}$
$\sin(at+b)$	$-\frac{\cos(at+b)}{a}$
$\frac{1}{\cos^2(t)}$	$\tan(t)$
$\frac{1}{\sin^2(t)}$	$-cotan(t)$
$\frac{1}{1+t^2}$	$Arctan(t)$
$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$Arcsin(t)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$Arccos(t)$
a^t	$\frac{a^t}{\ln(a)}$
$u'(t)e^{u(t)}$	$e^{u(t)}$

II. INTEGRATION PAR PARTIE :

$$\int_a^b u'(t).v(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u(t).v'(t)dt$$

III. ANGLES REMARQUABLES

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

...