

Module d'harmonisation en probabilités

Durée : 2h

Seules les calculatrices non programmables, non graphiques de type collège sont autorisées. Seul un résumé de cours (une feuille A4 recto verso manuscrite) est autorisé. Les autres documents (support de cours, livret élève...) sont interdits.

Exercice 1 (3 points)

Un laboratoire a mis au point un nouveau test de dépistage de la grippe. Des essais cliniques montrent que le test donne un résultat positif à 96% quand la personne est effectivement malade, et un résultat négatif à 98% quand la personne n'est pas malade. *A priori*, le test est assez fiable. Et pourtant...

1. Quelle est la probabilité que le test soit positif quand la personne n'est pas malade de la grippe ?
2. Sur une population avec 3% de malades, quelle est la probabilité qu'une personne soit testée positive ?
3. Toujours sur une population avec 3% de malades, quelle est la probabilité qu'une personne testée positive soit effectivement malade ? Que pensez-vous de ce test ?

Exercice 2 (4 points)

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{]0, +\infty[}(x)$ avec $\lambda=1$.

1. Représenter la fonction f . Vérifier que f est bien une densité de probabilité. A quelle loi vous fait penser la loi suivie par X ?
2. Donner la moyenne et la variance de X .
3. Calculer $P(-1 < X < 3)$. Représenter cette probabilité sur le graphe de f .

Soit Y une variable aléatoire binomiale de paramètres $(n=4, p=1/2)$.

4. Donner la moyenne et la variance de Y .
 5. Calculer $P(-1 < Y < 3)$.
- Soit Z une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs $+1$ ou -1 avec la même probabilité.
6. Calculer la moyenne et la variance de Z .
 7. Calculer $P(-1 < Z < 3)$.

Exercice 3 (3 points)

La note X obtenue par des étudiants à un examen est une variable aléatoire normale de moyenne $\mu=8,5$ et de variance égale à 4.

1. Représenter l'allure de la densité de X .
2. Calculer la proportion p d'étudiants ayant une note supérieure à 10 à l'examen. Représenter cette probabilité sur le graphe.
3. Quelle devrait être la moyenne μ de X pour que $3/4$ des étudiants aient une note supérieure à 10 ?

Exercice 4 (4 points)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe :

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy & \text{si } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante k .
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Le couple (X,Y) est-il un couple de variables aléatoires indépendantes ? décorrélées ?
3. Calculer $P((X < 1/4) \cup (Y < 1/2))$.
4. Calculer $P(Y < X)$.

Exercice 5 (2,5 points)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } (x,y) \in D \text{ avec } D = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1], y < 1-x\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter le domaine D sur lequel la densité est non nulle.
2. Vérifier que la fonction est bien une densité de probabilité conjointe.

Exercice 6 (3,5 points)

Soit un couple aléatoire (X,Y) centré de matrice de covariance: $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ avec $\rho \neq 0$.

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elles réduites ? décorrélées ? indépendantes ?
2. On pose $U=X-Y$ et $V=X+2Y$. Calculer la moyenne et la variance de U et V .
3. Déterminer la covariance du couple (U,V) . A quelle condition sur ρ les variables aléatoires U et V sont-elles décorrélées ?

Annexe A. Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

La table ci-dessous donne les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir les valeurs de $F_X(t) = P(X < t)$ pour différentes valeurs de t , avec X une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance unité.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Utilisation :

Pour un réel t donné, on lit les décimales dans les lignes et les centièmes dans les colonnes.

Par exemple, la valeur de $F(1.65)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05, on en déduit : $F(1.65) = 0.9505$ à 10^{-4} près.

Pour les valeurs négatives de t , on utilise la relation $F(-t) = 1 - F(t)$ qui se justifie du fait que la densité de probabilité d'une loi normale centrée est symétrique par rapport à l'axe vertical en 0, les deux aires sont donc égales.